Semnale şi Sisteme - Subiect de Examen

Fie sistemul:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 4}. \tag{1}$$

a) Găsiţi funcţia pondere pentru sistemul (1).

b) Calculaţi răspunsul la intrare rampă.

c) Trasaţi hodograful sistemului.

d) Trasaţi diagramele Bode pentru $G(s) = (s + 20)H(s)$.

e) Este stabil sistemul (1) ?

f) Discretizaţi sistemul cu pasul $T = \frac{\pi}{3}$.

g) Analizaţi stabilitatea BIBO a sistemului $y(t) = \cos(u(t))$.

h) Este sistemul de la g) invariant în timp ?

i) Figuraţi polii sistemului de ordin 2 care are t_t la $u(t) = \mathbf{1}(t)$ egal cu 2 secunde.

j) Daţi exemplu de semnal periodic discret (poate lua valori complexe, nu sin şi cos).

Soluţii.

a) Conform definiţiei transformatei Laplace inversă avem $h(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t)$. Descompunem $H(s)$ în fracţii simple:

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s-2)}. \tag{2}$$

$$H(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2}. \tag{3}$$

Aducând la acelaşi numitor în relaţia (3) avem:

$$H(s) = \frac{(A+B)s + 2B - 2A}{(s+2)(s-2)}. \tag{4}$$

Egalând coeficienţii în relaţii le (3) şi (4) avem condiţiile:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2B - 2A &= 1, \end{aligned}$$

de unde rezultă $A = -\frac{1}{4}$ şi $B = \frac{1}{4}$. Prin urmare avem:

$$H(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s-2}\right).$$

Folosind transformate Laplace inverse elementare valoarea funcţiei pondere este:

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(-\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{2t}\right)\mathbf{1}(t).$$

Funcţia pondere poate fi scrisă şi în forma: $h(t) = \frac{1}{2}\sinh(2t)$.

b) Avem $u(t) = t\mathbf{1}(t)$. Ştim că

$$y(t) = h(t) * u(t). \tag{5}$$

Aplicând transformata Laplace relaţiei 5 rezultă relaţia:

$$Y(s) = H(s)U(s).$$

Cum $U(s) = \frac{1}{s^2}$ obţinem:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s^2-4}\frac{1}{s^2}. \\ H(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-2}. \end{aligned}$$

Căutăm coeficienţii:

$$\begin{aligned} C &= Y(s)(s+2)|_{s=-2} \\ &= \left.\frac{(s+2)A}{s} + \frac{B(s+2)}{s^2} + C + \frac{D(s+2)}{s-2}\right|_{s=-2} \\ &= \left.\frac{1}{s-2}\frac{1}{s^2}\right|_{s=-2} \\ &= -\frac{1}{16}. \\ D &= Y(s)(s-2)|_{s=2} \\ &= \left.\frac{1}{s+2}\frac{1}{s^2}\right|_{s=2} \\ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= s^2Y(s)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{s^2-4}\Big|_{s=0} \\
&= -\frac{1}{4}. \\
A &= \frac{d}{ds}\left(Y(s)s^2\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{-2s}{(s^2-4)}\Big|_{s=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Prin urmare

$$Y(s) = \frac{-1}{4s^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{16}\frac{1}{s+2},$$

rezultând

$$y(t) = \left(-\frac{1}{4}t + \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-2t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{2t}\right)\mathbf{1}(t).$$

c) Ştim că

$$H(s) = \frac{1}{s^2-4}.$$

Facem $s = j\omega$ şi avem:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2-4}.$$

Descompunând

$$H(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

găsim

$$\begin{aligned}
U(\omega) &= -\frac{1}{\omega^2+4}, \\
V(\omega) &= 0.
\end{aligned}$$

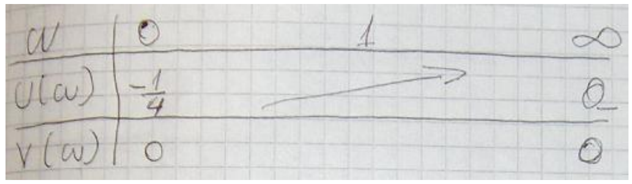

Figura 1: Comportarea la infinit.

- Intersecţiile cu axele:
$$\begin{cases} U(\omega) \neq 0 & \forall \omega; \\ V(\omega) = 0 & \forall \omega. \end{cases}$$
- Asimptote:
$$\begin{cases} U(\infty) = 0 & ; \\ V(\infty) = 0 & . \end{cases}$$
- Monotonie:
Derivăm $U(\omega)$ şi avem:
$$U'(\omega) = \frac{2\omega}{(\omega^2+4)^2} > 0, \forall \omega > 0,$$
deci U este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.
V este constantă 0.
- Comportarea la infinit:
Aceasta este redată în Figura 1, $U(1)$ fiind $-\frac{1}{5}$.
Hodograful este cel din Figura 2.

d) Avem

$$\begin{aligned} G(s) &= (s+20)H(s) \\ &= (s+20)\frac{1}{s^2-4} \\ &= \frac{s+20}{(s+2)(s-2)} \\ &= \frac{20}{-4}\frac{\frac{1}{20}s+1}{(\frac{s}{2}+1)(\frac{-s}{2}+1)} \\ &= -5\frac{\frac{1}{20}s+1}{(\frac{1}{2}s+1)(-\frac{s}{2}+1)}. \end{aligned}$$

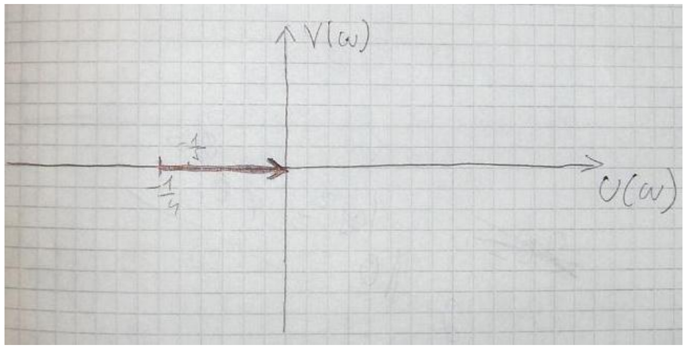

Figura 2: Hodograful.

Observaţii:

- $K < 0$. Faţă de $K > 0$ nu se modifică $|H(j\omega)|$, dar la fază se adaugă $\arg(K) = \arg(-1) = -\pi$. Alegerea argumentului este făcută prin convenţie.
- $T < 0$. Evident modulul nu se modifică, iar $\Phi(\omega) = \arctan(\omega|T|) = -\arctan(-\omega|T|)$.

Avem $[|K|]_{\mathrm{dB}} = 20 \log 5 \approx 14\mathrm{dB}$. Cum $q = 0$ avem o asimptotă de joasă frecvenţă de pantă $-20 \cdot 0 = 0\mathrm{dB/dec}$.

Calculăm pulsaţiile de tăiere:

- $T_1 = \frac{1}{20} \Rightarrow \omega_1 = 20$ - elementul de ordin I de la numărător modifică panta cu +20dB/dec.
- $T_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_2 = 2$ - elementul de ordin I de la numitor modifică panta cu -20dB/dec.
- $|T_3| = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_3 = 2$ - elementul de ordin I de la numitor modifică panta cu -20dB/dec.

Diagramele Bode se află în Figura 3. Punctele de referinţă pentru funcţia de fază, $\Phi(\omega)$, folosite pentru trasarea graficului acesteia, sunt:

$$\begin{cases} \Phi(0) = -\pi, \\ \Phi(\omega_{2,3}) \approx -\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -\pi, \\ \Phi(\omega_1) \approx -\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}, \\ \Phi(\infty) = -\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

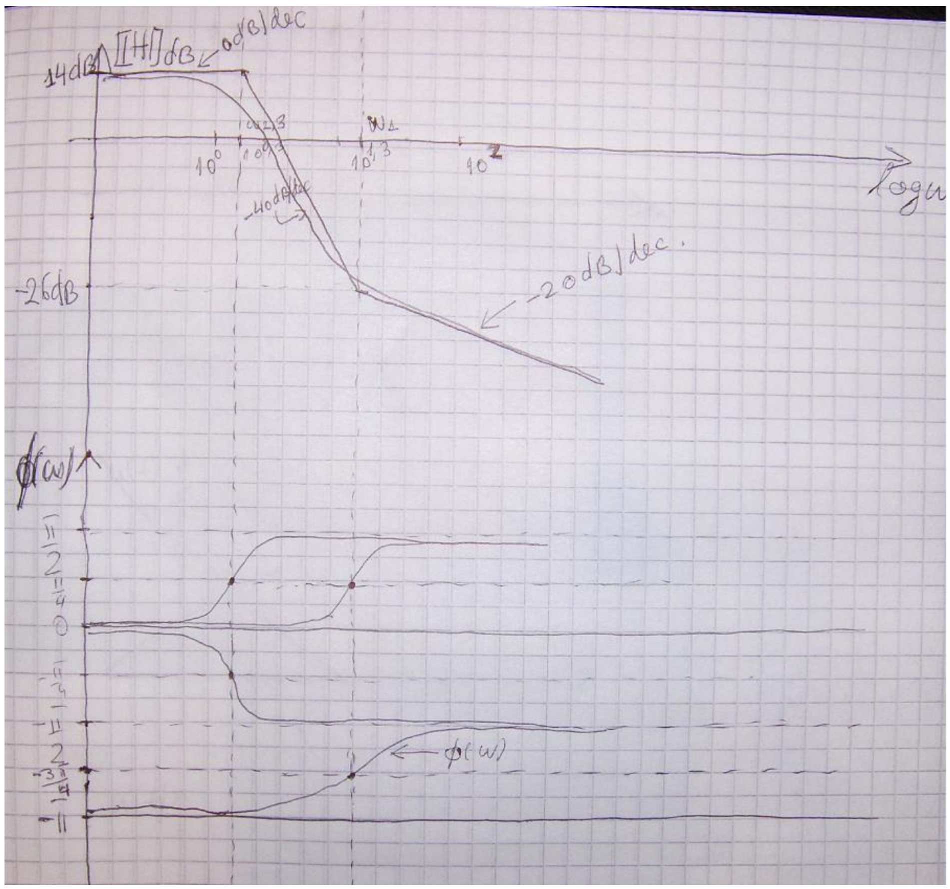

Figura 3: Diagramele Bode.

e) Cum
$$H(s) = \frac{1}{s^2-4} = \frac{1}{(s+2)(s-2)},$$
funcţia noastră are doi poli: $s_1 = 2$ şi $s_2 = -2$. Pentru că $s_1 \notin \mathbb{C}^-$ sistemul nostru nu este stabil.

f) Pasul de discretizare este $h = \frac{\pi}{3}$. În continuare avem:
$$\begin{aligned} H_d(z) &= (z-1)\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Rez}\left(\frac{H(s)}{s}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{sh}}; p_i\right) \\ &= (z-1)\left[\mathrm{Rez}\left(\frac{H(s)}{s}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{s\frac{\pi}{3}}}; 0\right) + \mathrm{Rez}\left(\frac{H(s)}{s}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{s\frac{\pi}{3}}}; 2\right) + \right. \\ &\quad \left. \mathrm{Rez}\left(\frac{H(s)}{s}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{s\frac{\pi}{3}}}; -2\right)\right]. \end{aligned}$$

Calculăm reziduurile:
$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\frac{1}{s^2-4}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{s\frac{\pi}{3}}}s &= -\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}, \\ \lim_{s\to 2}\frac{1}{s}\frac{1}{s^2-4}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{s\frac{\pi}{3}}}(s-2) &= \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}}, \\ \lim_{s\to -2}\frac{1}{s}\frac{1}{s^2-4}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{s\frac{\pi}{3}}}(s+2) &= \frac{-1}{2}\frac{-1}{4}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}}}. \end{aligned}$$

Astfel
$$\begin{aligned} H_d(z) &= (z-1)\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{8}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}} + \frac{1}{8}\frac{1}{z-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}}}\right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\frac{(z-1)\left[\left(z-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}}\right)+\left(z-\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}\right)\right]}{\left(z-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}}\right)\left(z-\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}\right)} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\frac{(z-1)\left(2z-\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}+\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}}\right)\right)}{z^2 - z\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}+\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}}\right)+1} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\frac{(z-1)(2z-2\cosh(\frac{2\pi}{3}))}{z^2-2z\cosh(\frac{2\pi}{3})+1}. \end{aligned}$$

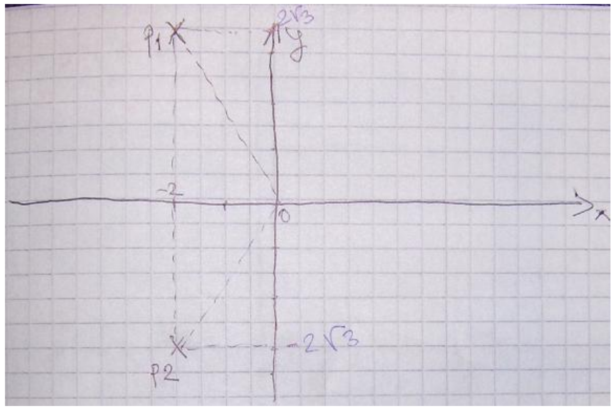

Figura 4: Polii.

g) Avem

$$y(t) = \cos(u(t)).$$

Şe ştie că $\cos(t) \in [-1, 1], \forall t \in \mathbb{R}$. Fie $u(t)$ mărginită. Atunci $\cos(u(t))$ mărginită, ceea ce implică $y(t)$ mărginită, deci sistemul este stabil în sens BIBO.

h) Sistemul de la g) este invariant în timp dacă şi numai dacă $\sigma^\tau T u = T \sigma^\tau u$, pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$ şi u, adică $\sigma^\tau \cos(u(t)) = \cos(\sigma^\tau u(t)) \Leftrightarrow \cos(u(t-\tau)) = \cos(u(t-\tau))$. Ultima egalitate fiind evidentă rezultă că sistemul este invariant în timp.

i) Ştim că

$$\frac{4}{\zeta \omega_n} \approx 2,$$

deci $\zeta \omega_n = 2$. Polii sistemului au forma

$$p_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \text{ deci } \mathrm{Re}(p_i) = -2.$$

De exemplu, pentru $\zeta = \frac{1}{2}$ şi $\omega_n = 4$, vom avea $p_{1,2} = -2 \pm 2j\sqrt{3}$. Polii sunt reprezentaţi în Figura 4.

j) Considerăm următorul semnal periodic discret:

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k \text{ par}; \\ 0, & k \text{ impar}. \end{cases}$$