Semnale şi Sisteme - Subiect de Examen

a) Există sisteme liniare şi invariante în timp care nu sunt cauzale ? Dacă da, exemplificaţi, dacă nu, argumentaţi.

b) Adevărat sau fals:

Dacă răspunsul unui sistem de convoluţie este mărginit pentru $u(t) = \sin(\omega t), \forall \omega \in \mathbb{R}$ atunci sistemul este stabil BIBO în sens strict.

c) Trasaţi diagramele Bode pentru $\frac{s(1+20s)}{(s^2+s+1)(100s+1)^2}$.

d) Calculaţi răspunsul sistemului $\frac{1}{(s+1)^2}$ la intrare:

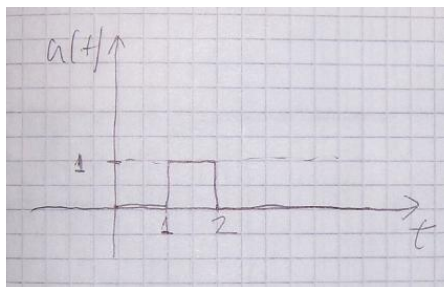


Figura 1: Intrare $u(t)$.

e) Este semnalul discret $\dfrac{\sin k}{k}$ mărginit ? ($k \in \mathbb{Z}$).

f) Analizaţi stabilitatea sistemului

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

g) Pentru $a_1 = a_2 = 2$ trasaţi hodograful.

h) Pentru $a_1 = a_2 = 2$ figuraţi polii acestuia în $\mathbb{C}$.

i) Pentru $a_1 = a_2 = 3$ determinaţi răspunsul permanent al lui $H(s)$ la intrare $u(t) = \mathrm{e}^t \mathbf{1}(t)$.

Soluţii.

a) Răspunsul este DA.

- Liniaritate: $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2)$.
- Invarianţă: $\sigma^\tau T u = T \sigma^\tau u$.
- Cauzalitate: $u_1(t) = u_2(t) \Rightarrow y_1(t) = y_2(t), \forall t$.
  Sistemul $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h * u$ liniar şi invariant în timp este cauzal dacă şi numai dacă $h(t) = 0, \forall t < 0$. Deci dacă luăm un h pentru care există $t', t' < 0$ a.î. $h(t') \neq 0$ atunci sistemul nu este cauzal, deşi este liniar şi invariant în timp.

b) Stabilitatea unui sistem de convoluţie: Dacă $||h||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$ atunci sistemul de convoluţie este stabil, şi reciproc. Prin urmare stabilitatea depinde de $h(t)$, şi nu de $u(t)$, deci propoziţia este falsă.

c) Avem

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s(1+20s)}{(s^2+s+1)(100s+1)^2} \\ &= \frac{1}{s^{-1}} \frac{20s+1}{(s^2+s+1)(100s+1)^2}. \end{aligned}$$

- $q = -1$ deci asimptota de joasă frecvenţă are panta $-20 \cdot (-1) = 20$dB/dec.
- $[K]_{dB} = 20 \log 1 = 0$.

Calculăm pulsaţiile de tăiere:

- $T_1 = 20 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{20} = 10^{-(\log 2 + 1)} \approx 10^{-1.3}$ - elementul de ordin I de la numărător modifică panta cu +20dB/dec.
- $T_2 = 1 \Rightarrow \omega_2 = 1 = 10^0$ - elementul de ordin II de la numitor modifică panta cu -40dB/dec.
- $T_3 = 10^2 \Rightarrow \omega_3 = \frac{1}{10^2}$ - elementul de ordin II de la numitor modifică panta cu -40dB/dec.

Diagramele Bode se află în Figurile 2 şi 3. Punctele de referinţă pentru funcţia

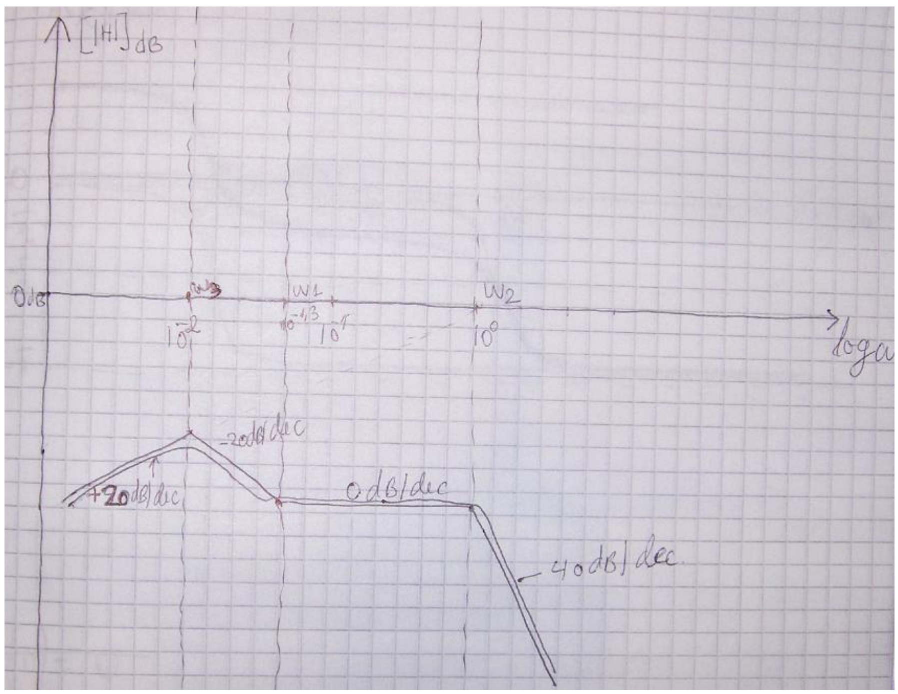


Figura 2: Caracteristica amplitudine - pulsaţie

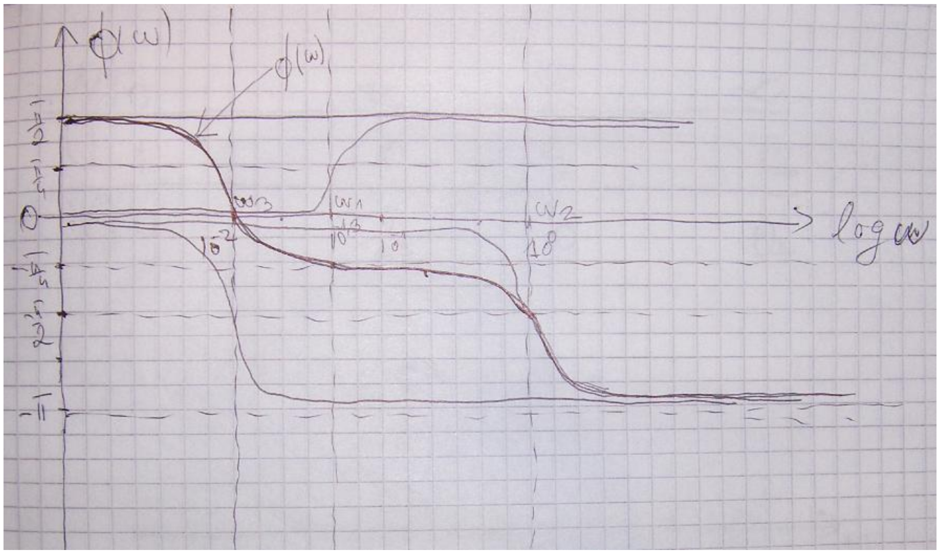


Figura 3: Caracteristica fază - pulsaţie

de fază, $\Phi(\omega)$, folosite pentru trasarea graficului acesteia, sunt:

$$\begin{cases} \Phi(0) = \frac{\pi}{2}, \\ \Phi(\omega_3) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0, \\ \Phi(\omega_1) \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{\pi}{4}, \\ \Phi(\omega_2) \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}, \\ \Phi(\infty) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi - \pi = -\pi. \end{cases}$$

d) Avem

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Scriem $u(t) = \mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)$.

Ştim că $Y(s) = H(s)U(s)$. Transformata Laplace a funcţie $u(t)$ este $U(s) = \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s} - \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s}$. Atunci

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-2s}\right)$$

Descompunem în fracţii simple:

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s}.$$

Calculăm coeficienţii:

- $C = sY(s)|_{s=0} = 1$.
- $B = (s+1)^2 Y(s)|_{s=-1} = -1$.
- $A = \frac{d}{ds}\left((s+1)^2 Y(s)\right)|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\frac{1}{s}\Big|_{s=-1} = -1$.

Atunci vom avea:

$$Y(s) = \left(\frac{-1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s}\right)\left(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-2s}\right).$$

Aplicând transformata Laplace inversă obţinem:

$$y(t) = \left(-\mathrm{e}^{-(t-1)} - (t-1)\mathrm{e}^{-(t-1)} + 1\right)\mathbf{1}(t-1) - \left(-\mathrm{e}^{-(t-2)} - (t-2)\mathrm{e}^{-(t-2)} + 1\right)\mathbf{1}(t-2).$$

e) Funcţia sinus este mărginită la intervalul $[-1, 1]$. Cum

$$\lim_{k\to 0}\frac{\sin k}{k} = 1, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{\sin k}{k} = 0$$

avem că semnalul este mărginit, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

f) Avem

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Conform criteriului lui Hurwitz sistemul este stabil dacă şi numai dacă toţi minorii principali ai matricei

$$\begin{pmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \end{pmatrix}$$

sunt strict pozitivi. Aşadar sistemul este stabil dacă şi numai dacă $a_2 > 0$ şi $a_1 a_2 - 1 > 0$.

g) Pentru $a_1 = a_2 = 2$ funţia de transfer devine:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Facem $s = j\omega$ şi avem:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2j\omega + 1} \\ &= \frac{1}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + 1} \\ &= \frac{1 - 2\omega^2 - j\left(2\omega - \omega^3\right)}{\left(1 - 2\omega^2\right)^2 + \left(2\omega - \omega^3\right)^2}. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$U(\omega) = \frac{1 - 2\omega^2}{\left(1 - 2\omega^2\right)^2 + \left(2\omega - \omega^3\right)^2}$$

şi

$$V(\omega) = \frac{\omega^3 - 2\omega}{\left(1 - 2\omega^2\right)^2 + \left(2\omega - \omega^3\right)^2}.$$

De aici obţinem:

$$U(\omega) = \frac{1 - 2\omega^2}{\omega^6 + 1}$$

şi

$$V(\omega) = \frac{\omega^3 - 2\omega}{\omega^6 + 1}.$$

Avem

$$\begin{array}{ll} U(0) = 1 & U(\infty) = 0_- \\ V(0) = 0 & V(\infty) = 0_+ \end{array}$$

$1 - 2\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\omega^3 - 2\omega = 0 \Leftrightarrow \omega = 0, \;\; \omega = \sqrt{2}$. Aşadar

$$\begin{array}{cc} U(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0, & V(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ U(\sqrt{2}) = -\frac{1}{3} & V(\sqrt{2}) = 0 \end{array}$$

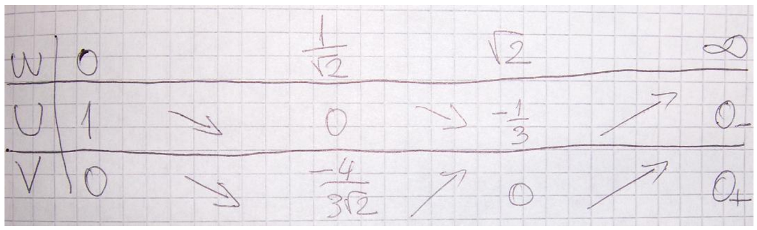
Folosind datele pe care le-am calculat scriem un tabel de variaţie ca în figura 4 şi trasam hodograful pe baza acestui tabel ca în figura 5.

Sa observam ca pt. $\omega = 1$ avem

$$U(\omega) = -\frac{1}{2}, \;\; V(\omega) = -\frac{1}{2}.$$

Aşadar funcţia $U(\omega)$ scade sub valoarea $-\frac{1}{3}$.

Hodograful din figura 5 a fost făcut pentru $\omega \in (-\infty, \infty)$.



ω	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{2}$		∞
U	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0_-
V	0	$\searrow$	$\frac{-4}{3\sqrt{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0_+

Figura 4: Tabelul de variaţie

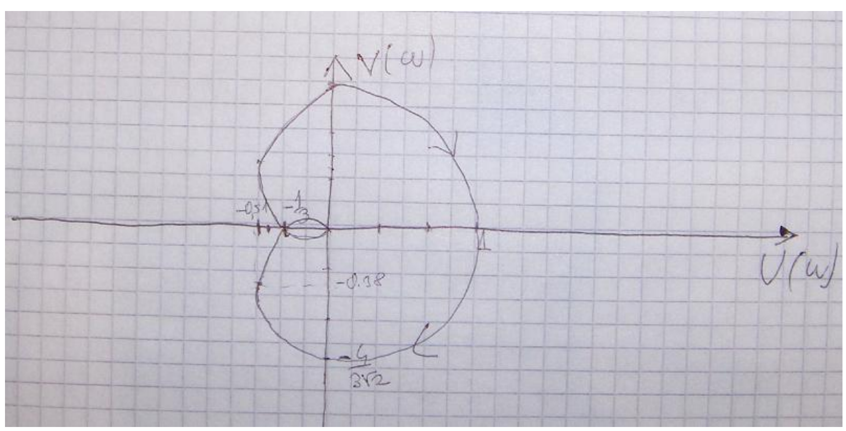


Figura 5: Hodograful

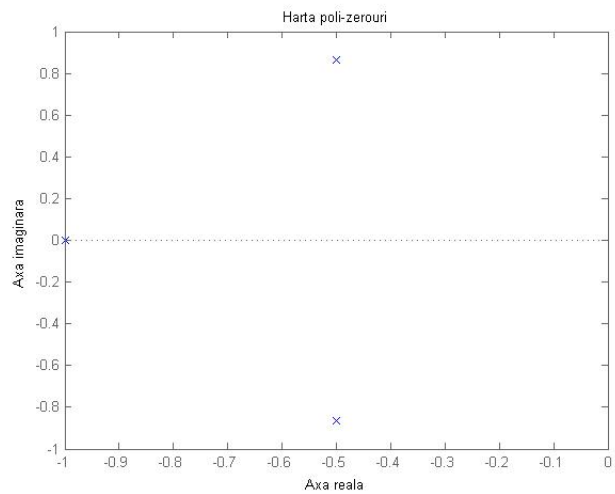


Figura 6: Polii funcţiei de transfer.

h) Observăm că -1 este rădăcină pentru polinomul de la numitor. Împărţind polinomul de la numitor la $s+1$ obţinem

$$s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = (s+1)(s^2 + s + 1).$$

Cele trei rădăcini se reprezintă ca în Figura 6 (aceasta a fost făcută cu ajutorul MATLAB).

i) Pentru $a_1 = a_2 = 3$ funcţia de transfer devine:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{(s+1)^3}.$$

Dacă $u(t) = \mathrm{e}^t \mathbf{1}(t)$ atunci $U(s) = \frac{1}{s-1}$. Atunci

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3}\frac{1}{s-1} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} + \frac{D}{s-1}. \tag{1}$$

Calculăm coeficienţii:

- $D = (s-1)Y(s)|_{s=1} = \frac{1}{8}$.

- $B = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 Y(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-1}\right)\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{4}.$
- $A = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 Y(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{(s-1)^2}\right)\Big|_{s=-1} = \frac{2(s-1)}{(s-1)^4}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{8}.$
- $C = (s+1)^3 Y(s)\big|_{s=-1} = -\frac{1}{2}.$

Înlocuind A, B, C, D în (1) avem:

$$Y(s) = -\frac{1}{8}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{s-1}.$$

Atunci

$$y(t) = \left(-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{t}\right)\mathbf{1}(t).$$

Răspunsul permanent este $y_p(t) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^t\mathbf{1}(t)$ $\left(\lim\limits_{t\to\infty} y_p = \infty\right)$.