Teoria Sistemelor Automate. Setul de probleme nr. 3

Problema 3.1. Rezolvaţi ecuaţia $\dot{x} = ax$. Discuţie după $a \in \mathbb{R}$.
Generalizare: $\dot{x} = Ax$.
Caz particular: A matrice diagonala. Alegeti drept conditie initiala vectorul $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.
Ce forma are solutia determinata de aceasta conditie initiala ?
Dar dacă alegeţi vectorul $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$?

Problema 3.2. Fie ansamblul mecanic constituit din masa si resort descris în figura 1 , unde y este pozitia

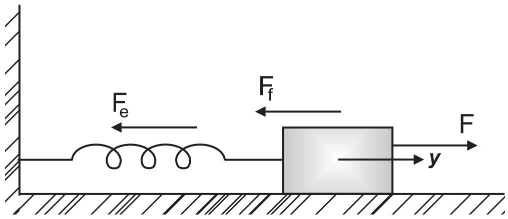

Figura 1: Sistem mecanic cu masa si resort

masei, $F(t)$ forta exterioara (comanda sau intrarea sistemului), $F_f = b\dot{y}$ forta de frecare (vascoasa) si $F_e = ky$ forta elastica din resort. Considerati $m = 1kg$, $b = 3kg/s$, $k = 2N/m$.

a) Scrieti ecuatiile unei reprezentari de forma $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, alegand ca iesire pozitia y. Care va fi starea x ?

b) Determinati *evoluţia* liberă pentru $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$ si *răspunsul* fortat la intrare treapta unitara.

c) Comparati expresia raspunsului *fortat* cu cea a raspunsului *permanent* la aceeasi intrare, $u(t) = \mathbf{1}(t)$.

Problema 3.3. Se considera circuitul din figura 2. Presupunem ca, la momentul initial, $i(0) = i_0$.

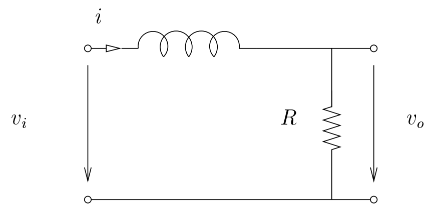

Figura 2: Circuitul LR

a) Scrieti ecuatiile unei reprezentari de forma $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, alegand corespunzator intrarea u, iesirea y si starea x.

b) Determinati raspunsul liber pentru $i_0 = 0$ si $i_0 = 1$. Calculaţi de asemenea si evoluţia forţată la intrare treapta unitara.

Problema 3.4. Fie sistemul $\dot{x} = Ax + Bu$ cu $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Precizati

a) daca sistemul este stabil.

b) care este evolutia libera pentru $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) care este evolutia fortata pentru $u(t) = \mathbf{1}(t)$.

Aceeasi problema pentru $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ si $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Problema 3.5. Consideram sistemul $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, unde
$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Se cer:

a) matricea fundamentala. Este sistemul stabil ?

b) matricea pondere.

c) matricea de transfer.

d) raspunsul liber pentru $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =: x_1$. Este adevarat ca $\lim_{t \to \infty} x_l(t) = 0$? Este x_1 neobservabila ? Aceleasi intrebari pentru $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} := x_2$.

e) evolutia fortata pentru $u(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$.

f) o realizare minimala (alta decat cea de mai sus, in caz ca aceasta este minimala).

Daca matricea A de mai sus se inlocuieste cu $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, determinati modurile controlabile si modurile observabile ale sistemului. Determinati o stare controlabila si observabila, o stare controlabila si neobservabila, o stare necontrolabila si neobservabila. Exista stari necontrolabile care sunt observabile?

Problema 3.6. a) Demonstrati ca realizarea standard observabila (RSO) este observabila.

b) Se considera ecuatia
$$y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = \beta u$$
Scrieti un sistem echivalent $\dot{x} = Ax + Bu$. Este acesta controlabil ? De ce ?

c) Exista sisteme observabile care nu sunt stabile ? Poate fi realizarea minimala a unui sistem necontrolabila ? Dar instabila ?

d) Analizati stabilitatea sistemului $\dot{x} = Ax$, unde $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Problema 3.7. Sa se scrie cate doua realizari distincte pentru fiecare din matricile de transfer de mai jos:

$$a)\ T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2-1} & \frac{1}{s} & \frac{s}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s-2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}; \qquad b)\ T(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} \\ \frac{s}{s^2+s} \\ \frac{s}{s^2-s} \end{bmatrix}; \qquad c)\ T(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Analizati minimalitatea realizarilor scrise. Calculati parametrii Markov pentru sistemul de la punctul b) si scrieti matricea Hankel asociata.

Problema 3.8. Verificati daca

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \ b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \ b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ c_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sunt realizari de stare ale aceluiasi sistem. Care dintre cele doua realizari este observabila ? Dar minimala ?

Problema 3.9. Se considera sistemul

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Precizati dimensiunea subspatiului controlabil. Exista stari necontrolabile ? Daca da, scrieti o astfel de stare. Daca nu, justificati raspunsul. Este sistemul controlabil ?

Problema 3.10. Fie sistemul $H(s) = \dfrac{s+2}{s^2+3s+2}$. Scrieti o realizare standard *observabila*. Precizati daca starea $x_1^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$ este controlabila. Determinati subspatiul controlabil al sistemului. Precizati daca $x_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ si $x_3^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$ sunt stari controlabile sau necontrolabile.

Problema 3.11. Determinati o stare neobservabila x_{no} pentru sistemul dat de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verificati ca raspunsul liber al sistemului initializat in x_{no} este identic nul. Determinati toate starile pentru care aceasta proprietate este adevarata.