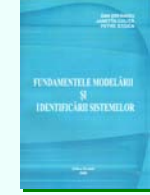
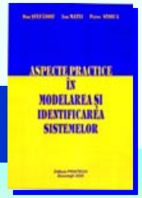
❺ Exerciții rezolvate



Exercițiul 1.1



Fie *e* un zgomot alb de medie nulă şi varianță unitară care stimulează intrarea unui model AR[1]. Să se determine secvența de auto-covarianță a zgomotului colorat rezultat, *y*.

Soluție

$$E \rightarrow \Big| \cdot y[n-k] \Big| \quad y[n] + a y[n-1] = e[n] \quad \Rightarrow \quad r_y[k] + a r_y[k-1] = r_{ey}[k], \quad \forall\, k \geq 0$$

$$r_{ey}[k] = E\{e[n]\, y[n-k]\} = E\left\{ e[n] \frac{1}{A(q^{-1})} e[n-k] \right\} =$$

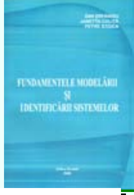
$$= E\left\{ e[n] \sum_{m \geq 0} \alpha_m e[n-k-m] \right\} = \sum_{m \geq 0} \alpha_m r_e[k+m] =$$

$$= \sum_{m \geq 0} \alpha_m \delta_0[k+m] = \alpha_{-k}, \quad \forall k \geq 0$$

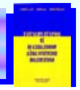
$$r_{ey}[k] = \alpha_0 \delta_0[k] = \delta_0[k]$$

$$1 : (1 + a q^{-1}) = \underbrace{1}_{\alpha_0} \underbrace{- a}_{\alpha_1} q^{-1} + \alpha_2 q^{-2} + \dots$$

❺ Exerciţii rezolvate



Soluție (Exercițiul 1.1)



$$r_y[k] + a\,r_y[k-1] = \delta_0[k]$$

$k=0$: $\quad \begin{cases} r_y[0] + a\,r_y[1] = 1 \\ r_y[1] + a\,r_y[0] = 0 \end{cases}$

$k=1$:

$$r_y[0]\,(1-a^2) = 1 \Rightarrow r_y[0] = \frac{1}{1-a^2}$$

$$r_y[1] = -\frac{a}{1-a^2}$$

$k=1$: $\quad \cancel{r_y[1]} + a\,r_y[0] = 0$

$k=2$: $\quad \cancel{r_y[2]} + a\,\cancel{r_y[1]} = 0 \qquad \left(-\frac{1}{a}\right)$

$\vdots$

$k=k$: $\quad r_y[k] + a\,\cancel{r_y[k-1]} = 0 \qquad \left(-\frac{1}{a}\right)^{k-1}$

$$r_y[k]\left(-\frac{1}{a}\right)^{k-1} = -a\,r_y[0].$$

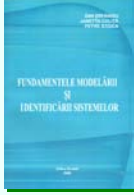
$\Downarrow$

$$r_y[k] = (-a)^k\,\frac{1}{1-a^2} = \frac{(-a)^k}{1-a^2}$$

$\forall k \geq 1$

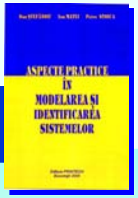
$$\boxed{r_y[k] = \frac{(-a)^{|k|}}{1-a^2} \qquad |a| \neq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

✸ Folosind relaţia analitică a secvenţei de auto-covarianță, se poate determina parametrul necunoscut a din datele măsurate (după estimarea auto-covarianţei).



❺ Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 1.2



Fie *e* un zgomot alb de medie nulă şi varianţă unitară care stimulează intrarea unui model MA[1]. Să se determine secvenţa de auto-covarianţă a zgomotului colorat rezultat, *y*. Dacă modelul MA are ordinul *nc*, să se arate că secvenţa de auto-covarianţă a ieşirii are suport finit (adică are un număr finit de valori nenule) şi să se determine dimensiunea maximă a suportului.

Soluţie

a) $r_y[k] = r_{ey}[k] + c\, r_{ey}[k-1]$, $\forall k \geq 0$

$r_{ey}[k] = E\{e[n]\,y[n-k]\} = E\{e[n]\,[e[n-k] + c\,e[n-k-1]]\} =$

$= r_e[k] + c\, r_e[k+1]$, $\forall k \geq 0$

$r_{ey}[k] = \delta_0[k]$, $\forall k \geq 0$; $r_{ey}[-1] = c$; $r_{ey}[-2] = 0$, $r_{ey}[k] = 0$ $\forall k \leq -2$

$$\begin{cases} r_y[0] = 1 + c^2 \\ r_y[1] = c \\ r_y[k] = 0, \ \forall k \geq 2 \end{cases}$$

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 1.2)

(b)

$$\mathrm{MA}[nc]: \quad y[n] = e[n] + c_1 e[n-1] + \dots + c_{nc} e[n-nc], \quad \forall n \geq 0$$

$$\Downarrow$$

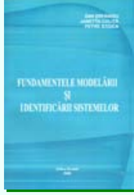
$$r_y[k] = r_{ey}[k] + c_1 r_{ey}[k-1] + \dots + c_{nc} r_{ey}[k-nc], \quad \forall k \geq 0$$

$$r_{ey}[k] = E\{e[n]\, y[n-k]\} = E\{e[n]\,[e[n-k] + c_1 e[n-k-1] + \dots + c_{nc} e[n-k-nc]]\}$$

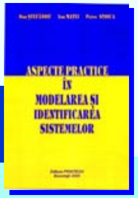
$$= \delta_0[k] + c_1 \delta_0[k+1] + \dots + c_{nc} \delta_0[k+nc], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} r_y[0] = 1 + c_1^2 + \dots + c_{nc}^2 \\ r_y[1] = c_1 + c_1 c_2 + \dots + c_{nc-1} c_{nc} \\ r_y[2] = c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{nc-2} c_{nc} \\ \vdots \\ r_y[nc] = c_{nc} \\ r_y[nc+1] = 0, \quad r_y[k] = 0, \quad \forall k \geq nc+1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Supp}(r_y) = \overline{-nc, +nc}$$



Exerciţiul 1.3



Prin filtrarea unui zgomot alb *e* de medie nulă şi varianţă unitară se obţine un zgomot colorat *y* cu densitatea spectrală:

$$\phi_y(\omega) = \frac{0.75}{1.25 - \cos\omega}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Considerînd că filtrul utilizat are funcţia de sistem:

$$H(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}},$$

să se determine cei 2 parametri ai acestuia. Pot fi ei determinaţi în mod unic folosind numai analiza spectrală? Evaluaţi de asemenea varianţa zgomotului colorat.

Soluţie

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) \cdot \overline{H(e^{j\omega})} = \frac{b_1 e^{j\omega}}{1 + a_1 e^{j\omega}} \cdot \frac{b_1 e^{-j\omega}}{(1 + a_1 e^{-j\omega})} =$$

$$= \frac{b_1^2}{1 + 2a_1\cos\omega + a_1^2} = \frac{0.75}{(1 + a_1^2) + 2a_1\cos\omega}$$

Soluție (Exercițiul 1.3)

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})\cdot\overline{H(e^{j\omega})} = \frac{b_1 e^{j\omega}}{1+a_1 e^{j\omega}}\cdot\frac{b_1 e^{-j\omega}}{(1+a_1 e^{-j\omega})} =$$

$$= \frac{b_1^2}{1+2a_1\cos\omega + a_1^2} = \frac{0.75}{(1+a_1^2)+2a_1\cos\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} b_1 = \pm\sqrt{0.75} \\ 1+a_1^2 = 1.25 \Rightarrow a_1^2 = 0.25 \Rightarrow a_1 = \pm 0.5 \\ 2a_1 = -1 \Rightarrow a_1 = -0.5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_1 \in \{-\sqrt{0.75}, +\sqrt{0.75}\}$$

$\boxed{\text{Neunic!}}$

$$\frac{b_1}{1+a q^{-1}} = b_1 \sum_{k\geq 0} \alpha_k q^{-k}$$

$$1 \equiv \sum_{k\geq 0}\alpha_k q^{-k} + a_1\sum_{k\geq 0}\alpha_k q^{-k-1} \equiv \sum_{k\geq 0}\alpha_k q^{-k} + a_1\sum_{k\geq 1}\alpha_{k-1} q^{-k} \equiv$$

$$\equiv \alpha_0 + \sum_{k\geq 1}(\alpha_k + a_1\alpha_{k-1}) q^{-k}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_k = -a_1\alpha_{k-1}, \ \forall k\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_k = (-a_1)^k, \ \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow y[n] = \left[b_1 \sum_{k\geq 0}(-a_1)^k q^{-k}\right] e[n].$$

$$\sigma_y^2 = r_y[0] = b_1^2 \sum_{k\geq 0} a_1^{2k} = \frac{b_1^2}{1-a_1^2} = \frac{0.75}{1-0.25} = 1$$

☺