❺ Exerciții rezolvate

Exercițiul 2.3

Deduceți relațiile recurente verificate de funcțiile de covarianță ale ieşirii în fiecare din modelele ARX[1,1] şi OE[1,1]. Evaluați SNR ale celor 2 modele în cazul în care sunt stimulate cu treapta unitară.

Soluție

ARX[1,1] : $y[n] + a\,y[n-1] = b\,u[n-1] + e[n] \quad \Big| \; \xrightarrow{E} \; \cdot\, y[n-k]$

$$\Downarrow$$

$$r_y[k] + a\,r_y[k-1] = b\,r_{uy}[k-1] + r_{ey}[k] \qquad \boxed{\forall k \geq 0}$$

$$r_{ey}[k] = E\left\{ e[n]\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n-k] + \frac{1}{A(q^{-1})}e[n-k] \right) \right\} =$$

vezi $\boxed{\text{Ex 2.2}}$

$$= E\left\{ e[n]\left(b\sum_{m\geq 1}(-a)^{m-1}u[n-k-m] + \sum_{m\geq 0}(-a)^{m}e[n-k-m] \right) \right\} =$$

$$= b\sum_{m\geq 1}(-a)^{m-1}r_{eu}[k+m] + \sum_{m\geq 0}(-a)^{m}\underbrace{r_e[k+m]}_{=\lambda^2\delta_0[k+m]} =$$

$$= b\sum_{m\geq 1}(-a)^{m-1}r_{eu}[k+m] + \lambda^2\delta_0[k], \quad \forall k \geq 0$$

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 2.3)

- Ecuația recurentă generală este:

$$r_y[k] + a\, r_y[k-1] = b\Big(r_{uy}[k-1] + \sum_{m\geq 1}(-a)^{m-1} r_{eu}[k+m]\Big) + \lambda^2 \delta_0[k] \quad \boxed{\forall k\geq 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$A(q^{-1})\, r_y[k] = B(q^{-1})\, r_{uy}[k] + \frac{B(q^{+1})}{A(q^{+1})} r_{eu}[k] + \lambda^2 \delta_0[k]$$

plus!

- Caz particular interesant: u = zgomot alb $(0, \sigma_u^2)$ necorelat cu zgomotul alb e $(r_{eu} \equiv 0)$.

$$r_{uy}[k] = E\left\{u[n]\cdot\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u[n-k]\right)\right\} =$$

$$= b \sum_{m\geq 1} (-a)^{m-1} r_u[m+k] \equiv 0$$ (datorită întîrzierii cu 1 pas)

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 2.3)

(*) Rezultă: $A(q^{-1})\, r_y[k] = \lambda^2 \delta_0[k]$, $\forall k \geq 0$

• OE[1,1] : $y[n] + a\, y[n-1] = b\, u[n-1] + e[n] + a\, e[n-1]$

$\xrightarrow{E}\ \Big|\ \xrightarrow{\times\, y[n-k]}$

$$\Downarrow$$

$$r_y[k] + a\, r_y[k-1] = b\, r_{uy}[k-1] + r_{ey}[k] + a\, r_{ey}[k-1] \quad \boxed{\forall k \geq 0}$$

$$r_{ey}[k] = E\left\{ e[n] \left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u[n-k] + e[n-k] \right) \right\} =$$

$$= b \sum_{m \geq 1} (-a)^{m-1} r_{eu}[k+m] + \lambda^2 \delta_0[k]$$

(! Identic cu r_{ey} de la modelul ARX[1,1]!)

Soluție (Exercițiul 2.3)

- Ecuația recurentă generală este:

$$r_y[k] + a r_y[k-1] = b r_{uy}[k-1] + ab r_{eu}[k] + b(1-a^2)\sum_{m\geq 1}(-a)^{m-1} r_{eu}[k+m] + \lambda^2\left(\delta_0[k] + a\delta_0[k-1]\right)$$

$$\boxed{\forall k \geq 0}$$

- Caz particular interesant: u = z.a. $(0, \sigma_u^2)$ necorelat cu e

$$r_{uy}[k] = E\left\{u[n]\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n-k]\right)\right\} = 0, \quad \forall k \geq 0$$

(ca în cazul ARX[1,1])

(**) Rezultă: $A(q^{-1})\, r_y[k] = \lambda^2 A(q^{-1})\,\delta_0[k]$, $\forall k \geq 0$