❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 2.3)

• $\boxed{SNR \triangleq \dfrac{r_y[0]}{r_e[0]} = \dfrac{\sigma_y^2}{\lambda^2}}$ $\Rightarrow$ trebuie evaluate dispersiile σ_y^2 în ambele cazuri

■ Mai întâi: – se evaluează $r_{uy}[k]$ pentru cazul u = treaptă unitară.

$\boxed{ARX}$:

$$r_{uy}[k] = E\left\{u[n]\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n-k] + \frac{1}{A(q^{-1})}e[n-k]\right)\right\} =$$

$$= b\sum_{m\geq 1}(-a)^{m-1} r_u[m+k] + \sum_{m\geq 0}(-a)^{m} r_{ue}[m+k]$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$.

• $r_u[k] = \lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N-k}\sum\limits_{n=0}^{N-k-1} u[n]u[n+k] = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

• $r_{ue}[k] = E\{u[n]e[n-k]\} = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\begin{array}{l} u[n]=1,\ \forall n\geq 0 \\ E\{e[n]\}=0 \end{array}}$

$$\Rightarrow r_{uy}[k] = b\sum_{m\geq 1}(-a)^{m-1} = \frac{b}{1+a}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Stabilitate $\boxed{|a|<1}$

❺ Exerciții rezolvate

Soluție (Exercițiul 2.3)

ca mai sus

$\boxed{OE}$: $r_{uy}[k] = E\left\{u[n]\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n-k] + e[n-k]\right)\right\} = \ldots =$

$= \frac{b}{1+a}, \forall k \in \mathbb{Z}$ (la fel).

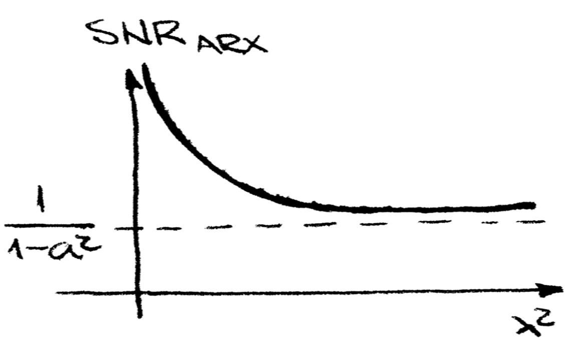
- Se evaluează $r_y[0] = \sigma_y^2$ plecând de la ecuațiile recurente generale particularizate în cazul u = treaptă unitară.

$\boxed{ARX}$: $r_y[k] + a r_y[k-1] = \frac{b^2}{1+a} + \lambda^2 \delta_0[k], \forall k \geq 0$

$$\begin{cases} r_y[0] + a r_y[1] = \frac{b^2}{1+a} + \lambda^2 \\ r_y[1] + a r_y[0] = \frac{b^2}{1+a} \quad \Big| \times(-a) \end{cases}$$

$$(1-a^2) r_y[0] = b^2 \frac{1-a}{1+a} + \lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_y^2 = r_y[0] = \frac{b^2}{(1+a)^2} + \frac{\lambda^2}{1-a^2} \geq 0$$



$$\boxed{SNR_{ARX} = \underset{>1}{\underset{\uparrow}{\frac{1}{1-a^2}}} + \underset{>0}{\underset{\uparrow}{\frac{b^2}{\lambda^2(1+a)^2}}}} > 1$$

❺ Exerciții rezolvate

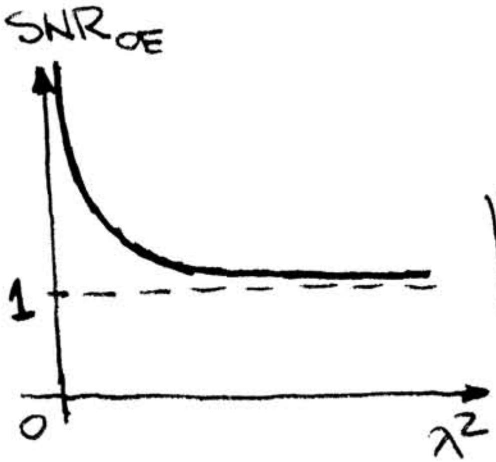
Soluție (Exercițiul 2.3)

$$\boxed{OE}: \quad r_y[k] + a\,r_y[k-1] = \frac{b^2}{1+a} + \lambda^2 \delta_0[k] + \lambda^2 a\, \delta_0[k-1] \qquad \forall k \geq 0$$

$$\begin{cases} r_y[0] + a\,r_y[1] = \dfrac{b^2}{1+a} + \lambda^2 \\ r_y[1] + a\,r_y[0] = \dfrac{b^2}{1+a} + a\lambda^2 & \Big| \times(-a) \end{cases}$$

$$(1-a^2)\,r_y[0] = b^2 \frac{1-a}{1+a} + (1-a^2)\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_y^2 = r_y[0] = \frac{b^2}{(1+a)^2} + \lambda^2$$



$$\boxed{SNR_{OE} = 1 + \frac{b^2}{\underbrace{\lambda^2(1+a)^2}_{>0}}} > 1$$

❺ Exerciții rezolvate

Exercițiul 2.4

Deduceți relațiile generale ale densităților spectrale de putere ale ieşirilor modelelor ARX[1,1] şi OE[1,1]. Deduceți răspunsuile ideale în frecvență ale sistemelor reprezentate de cele 2 modele.

Soluție

● ARX[1,1]

$$r_y[k] = E\{y[n]\,y[n-k]\} = E\left\{\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n] + \frac{1}{A(q^{-1})}e[n]\right) \times \left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u[n-k] + \frac{1}{A(q^{-1})}e[n-k]\right)\right\}$$

► Notații naturale:

$$H(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \sum_{k\geq 0} h_k q^{-k} \ (\text{sistem}) \quad (h_0=0) \quad ; \quad G(q^{-1}) = \frac{1}{A(q^{-1})} = \sum_{k\geq 0} g_k q^{-k} \ (\text{zgomot}) \quad (g_0=1)$$

$$r_y[k] = E\{(H(q^{-1})u[n] + G(q^{-1})e[n]) \times (H(q^{-1})u[n-k] + G(q^{-1})e[n-k])\} =$$

$$= \sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0} h_l h_m r_u[k+m-l] +$$

$$+ \sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0} h_l g_m r_{ue}[k+m-l] +$$

$$+ \sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0} h_l g_m r_{eu}[k+l-m] +$$

$$+ \sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0} g_l g_m r_e[k+m-l]$$