Capitolul 15: Estimatori de stare

15.1 Estimatori. Definiţii

Fie sistemul liniar

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \ t \in R$$

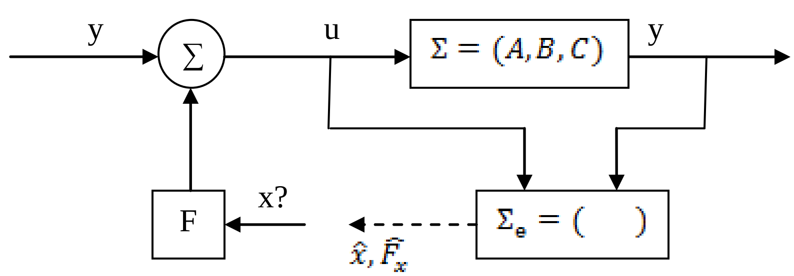
Definiţia 1: Se numeşte estimator modelul matematic descris de:

$$(2)\quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Iz(t) + Ky(t) + Hu(t) \\ w(t) = Mz(t) + Ny(t) \qquad (+Pu(t)) \end{cases}$$

cu proprietatea

$$(3)\quad \lim_{t\to\infty}(w(t) - F_x(t)) = 0$$

Observaţie: (Interpretarea)



Observaţii:
1) Dacă N=0, estimatorul se numeşte estimator strict propriu.
2) Dacă F=I_n, estimatorul se numeşte estimator de stare.
3) Dacă F=I_n, N=0 şi M=I_m, estimatorul este estimator de stare strict propriu (Kalman).

Observaţie: Fie sistemul liniar descris de:

$$(4)\quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y(t) = Cx + Du \end{cases}$$

$$(5)\quad \Rightarrow T(s) \overset{def}{=} C(sI - A)^{-1}B + D$$

Pentru cazul general, matricea de transfer a estimatorului este de tipul acesta (raţionale nestrict proprii).??????????????

15.2 Estimatorul unitar (Kalman)

$$(6)\quad \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + L(Cz - y) \\ w = z \end{cases}$$

Vrem să vedem în ce condiţii acest sistem copiază funcţionalitatea sistemului (1) (adică îndeplineşte relaţia (3)).

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = A + B \\ y = C \end{cases}$$

Dorim să evaluăm

$$(7)\quad e(t) = z(t) - x(t)$$

Sistemul (6) va fi un sistem estimator dacă şi numai dacă

$$(8)\quad \lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

$$(9)\quad \dot{z} - \dot{x} = A(z - x) + L(Cx - Cz) = (A + LC)(z - x)$$

Folosind relaţia (7) avem

$$(10)\qquad \dot{e}(t) = (A + LC)e(t)$$

$$(11)\qquad \text{adică}\qquad e(t) = e^{(A+LC)t} e(0) \xrightarrow[t=\infty]{} 0 \Leftrightarrow \sigma(A + LC) \subseteq \mathbb{C}^-$$

scalar

Similar, în cazul discret, apare ecuaţia

$$(12)\qquad e(t+1) = (A + LC)e(t)$$

$$(13)\qquad \text{adica}\qquad e(t) = (A + LC)^t e(0) \xrightarrow[t=\infty]{} 0 \Leftrightarrow \sigma(A + LC) \subseteq U_1(0)$$

Din relaţiile (11) şi (13) deducem că (6) este estimator dacă şi numai dacă $\sigma(A + LC)$ este stabilă.

Definiţia 2: (Pereche (C,A) detectabilă). Perechea (C,A) este detectabilă dacă există L astfel încât

$\sigma(A + LC)$ stabilă şi inclusa în $\begin{cases} \mathbb{C}\ \textit{pentru sisteme netede} \\ \mathcal{C}(1,0)\ \textit{pentru sisteme discrete} \end{cases}$

Observaţie: Legătura cu stabilitatea

Problema detectabilităţii este duală problemei stabilităţii deoarece

$$(14)\qquad \sigma(A + LC) = \sigma((A + LC)^T) = \sigma(A^T + C^T L^T)$$

$$\begin{cases} A^T = A^* \\ C^T = B^* \\ L^T = F^* \end{cases}$$

Un L – soluţie a problemei detectării se gaseşte dualizând perechea (C,A), rezolvând problema stabilizării şi redualizând rezultatul.

Teorema 1: (Estimatorul Kalman). Fie $\Sigma = (A, B, C)$ astfel încât perechea (C,A) este detectabilă. Atunci următorul algoritm furnizează un estimator de stare.

Alg$_1$ (Estimator Kalman)

Pas 1: Se calculează L astfel încât $\sigma(A + LC)$ stabilă.

Pas 2: Estimatorul $\Sigma_n = (J, K, H, M, N)$ este dat de:

$$\begin{cases} n_e = n & H = B \\ J = A + LC & M = I_n \\ K = -L & N = O \end{cases}$$

Demonstraţie:

Pas 1 este posibil deoarece perechea (C,A) este detectabilă.

$\Sigma_n = (J, K, H, M, N)$ este un estimator de stare deoarece (6) este de fapt:

$$\begin{cases} \dot{z} = (A + LC)z - Ly + Bu = Jz + Ky + Hu \\ w = z = Mz + N \end{cases} \quad (15)$$

15.3 Estimatorul minimal

Observaţie: Fie C epică ??????????????????????

(16) $rg(C) = p$

Fie $\tilde{C}$ o completare la o nesingulară.

$$T \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ C \end{bmatrix} \quad (17)$$

Se observă că

$$TT^{-1} = I_n \quad (18)$$

adică $\begin{bmatrix} \tilde{C} \\ C \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$

(19) de unde $\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$

Aplicăm schimbarea de coordonate

$$\hat{x} = Tx \overset{def}{=} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_1 \\ \hdashline x_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} n-p \\ p \end{array} \quad (20)$$

$$\hat{A} = TAT^{-1} \overset{def}{=} \begin{array}{c} \scriptstyle n-p \\ \begin{bmatrix} A_1 & \vdots & A_3 \\ \hdashline A_2 & \vdots & A_4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} n-p \\ \\ \end{array} \quad (21)$$

(22) $$\hat{B} = TB \overset{def}{=} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$y = Cx = \hat{C}\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

Observaţie: Pentru x_1 de dimensiune n-p, informaţia din ieşire a fost epuizată. Ceea ce putem să încercăm este să construim un estimator Kalman pentru starea parţială 1, care va fi de dimensiune (n-p). Pentru ca acest lucru să fie posibil, ar trebui ca proprietatea de detectabilitate a perechii (C,A) să fie transferată sistemului redus.

(23) $$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = x_2 \end{cases}$$

(24) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_3 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_1 + A_4 x_2 + B_2 u \\ y = x_2 \end{cases}$$

(25) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_3 y + B_1 u \\ \dot{y} = A_2 x_1 + A_4 y + B_2 u \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + \underbrace{B_1 u + A_3 y}_{\text{Bu}}$$

$$\underbrace{\dot{y} - A_4 y}_{\text{y}} - B_2 u = A_1 x_1$$

Perechea pentru care trebuie să construim estimatorul Kalman este (A_2, A_1).

Lema Gopinth: Perechea (C_1, A_2, A_1) este detectabilă dacă şi numai dacă perechea (C,A) este detectabilă.

Problema se reduce la a construi un estimator Kalman pentru perechea (A_2, A_1).