

Capitolul 7: Controlabilitatea ca Proprietate Structurală

Definiția 1: Un sistem $\Sigma = (A, B, C)$ (sau o pereche (A, B)) este controlabila dacă și numai dacă:

$$\text{rg}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n \quad (1)$$

Propoziția 1: Echivalența conservă controlabilitatea

Demonstrație: Fie $\Sigma = (A, B, C)$ și $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ două sisteme echivalente, adică există T nesing. astfel încât:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= TAT^{-1} \\ \hat{B} &= TB \\ \hat{C} &= CT^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Dorim să arătăm că:

$$\text{rg } \hat{R} = \text{rg } R$$

Calculăm:

$$\hat{R} \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = [TB \quad TAT^{-1}TB \quad \dots \quad TA^{n-1}T^{-1}TB] = T[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

unde putem scrie direct că :

$$\hat{R} = TR \quad (3)$$

Deoarece T nesingulară $\text{rg } \hat{R} = \text{rg } R$.

Observație: Matricea de controlabilitate se modifică prin echivalența ($\hat{x} = Tx$) ca și B :

$$\hat{R} = TR$$

Teorema 1: Teorema de descompunere controlabilă.

Fie $\Sigma = (A, B, C)$. Atunci există un izomorfism $T \in R^{n \times n}$ astfel încât:

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT^{-1} = [C_1 \quad C_2]$$

cu (A_1, B_1) controlabilă de dimensiune maximă $n_c = \text{rg } R$;

Observație 1: Interpretarea noțiunii de controlabilitate. Fie T izomorfism din TDC.

$$\text{Fie } \hat{x} = Tx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Dacă aplicăm schimbarea de coordonare din teorema de descompunere controlabilă, atunci:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

adică:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_3 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases} \quad (8)$$

Din relațiile (8) deducem că există în sistem o stare parțială x_2 care nu este influențată de comandă dar care afectează întreaga evoluție.

Observatia 2: Un sistem este echivalent intrare-ieșire cu partea sa controlabilă.

Demonstrație: Calculăm $T(\lambda)$

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= \hat{T}(\lambda) \stackrel{TDescControlabila}{=} \hat{C}(\lambda I - \hat{A})^{-1} \hat{B} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_1 - A_1 & -A_3 \\ 0 & \lambda I_2 - A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda I_1 - A_1)^{-1} & * \\ 0 & (\lambda I_2 - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 (\lambda I_1 - A_1)^{-1} B_1 \stackrel{def}{=} T_1(\lambda) \longleftarrow \sum_1 = (A_1, B_1, C_1) \end{aligned}$$

Observație: Partea necontrolabilă nu se vede in intrare-ieșire (adică nu are nici o contribuție pe ieșire)

Lema 1: A-invarianța lui R

$$AR \subset R \quad (16)$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} AR &= A \operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} AB & \dots & A^{n-1} B & A^n B \end{bmatrix} = \\ &= \operatorname{Im} \begin{bmatrix} AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} + \operatorname{Im} \begin{bmatrix} -\alpha_0 I & \dots & -\alpha_n A^n \end{bmatrix} B \subset R \end{aligned}$$

$$R = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$$

Lema 2:

$$\operatorname{Im} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \subset R$$

Demonstratie:

$$R = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} + \operatorname{Im} \begin{bmatrix} AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} \supseteq \operatorname{Im} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$