Capitolul 8: Controlabilitatea ca Proprietate Structurală(globala) Cap7 (in caiet)

Definiţia 1: Un sistem $\Sigma = (A, B, C)$ (sau o pereche (A, B)) este controlabil dacă şi numai dacă:

$$rg\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{k-1}B \end{bmatrix} = n \qquad (1)$$

Propoziţia 1: Echivalenţa conservă controlabilitatea

Demonstraţie: Fie $\Sigma = (A, B, C)$ şi $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ două sisteme echivalente cu transformarea de echivalenţă $T \in R^{n \times n}$. Atunci, avem:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= TAT^{-1} \\ \hat{B} &= TB \end{aligned} \qquad (2)$$

Calculăm:

$\hat{R} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \dots & \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TB & TAT^{-1}TB & \dots & TA^{n-1}T^{-1}TB \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$De unde putem scrie direct că :

$$\hat{R} = TR \qquad (3)$$

ceea ce înseamnă că:

$$rg\hat{R} = n \Leftrightarrow rgR = n$$

adică controlabilitatea este observată.

Teorema 1: La o schimbare de coordonate, matricea de controlabilitate se modifică astfel:

$$\hat{R} = TR$$

Teorema 2: Teorema de descompunere controlabilă. Fie $\Sigma = (A, B, C)$ deci există un izomorfism $T \in R^{n \times n}$ astfel încât:

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

unde perechea (A_1, B_1) este de dimensiune $r_c = rgR$ şi este controlabilă.

Observaţie: Interpretarea noţiunii de controlabilitate. Fie $\hat{x} = Tx \overset{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Dacă aplicăm schimbarea de coordonare din teorema de descompunere controlabilă, atunci:

$$\begin{cases} \dot{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

adică:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + A_3 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 \end{cases} \tag{8}$$

Din relaţiile (8) deducem că există în sistem o stare parţială x_2 care nu este influenţată de comandă dar care afectează întreaga evoluţie.

Propoziţia 2: Un sistem este echivalent intrare-ieşire cu partea sa controlabilă.

Demonstraţie: Calculăm $T(\lambda)$

$$T(\lambda) = \hat{T}(\lambda) \overset{TDescControlabila}{=} \hat{C}(\lambda I - \hat{A})^{-1} \hat{B} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_1 - A_1 & -A_3 \\ 0 & \lambda I_2 - A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda I_1 - A_1)^{-1} & * \\ 0 & (\lambda I_2 - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 (\lambda I_1 - A_1)^{-1} B_1 \overset{def}{=} T_1(\lambda)$$

Observaţie: Partea necontrolabilă nu se vede intrare-ieşire (adică nu are nici o contribuţie pe ieşire)

Demonstraţie: Fie $\overline{R}$ o bază a lui *R* de dimensiune $n_c = rgR$ şi fie *S* o completare până la o nesingulară în T^{-1}.

$$T^{-1} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \overline{R} & S \end{bmatrix} \tag{9}$$

De exemplu, putem alege $S = R^{\perp}$.

Observaţie: Dorim ca:

$$\begin{bmatrix} \overline{R} & S \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} \overline{R} & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \tag{*}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{R} & S \end{bmatrix}^{-1} B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{**}$$

Dar:

$$A \begin{bmatrix} \overline{R} & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{R} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

sau

$$\begin{bmatrix} A\overline{R} & AS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{R} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Deducem că:

$$\begin{cases} A\overline{R} = \overline{R} A_1 \\ AS = \overline{R} A_3 + S A_2 \end{cases} \tag{15}$$

Deci

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{R} & S \end{bmatrix}^{-1} AS$$

Rămâne de arătat că $\exists A_1$ astfel încât $A\overline{R} = \overline{R} A_1$

Lema 1: A-invarianţa lui R

$$AR \subset R \tag{16}$$

Demonstraţie:

$$AR = A\,\mathrm{Im}\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} AB & \dots & A^{n-1}B & A^n B \end{bmatrix} =$$

$$\mathrm{Im}\begin{bmatrix} AB & \dots & A^{n-1}B & \left(-\alpha_0 I - \dots - \alpha_{n-1}A^{n-1}B\right) \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{Im}\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \overset{def}{=} R$$

Interpretarea lemei 1:

$$R = \mathrm{Im}\left(\overline{R}\right)$$

$A\,\mathrm{Im}\left[\overline{R}\right] \subset \mathrm{Im}\,\overline{R}$ sau $\mathrm{Im}\left[A\overline{R}\right] \subset \mathrm{Im}\left[\overline{R}\right]$ ceea ce ne duce cu gândul la teorema „ $Ax = B$ are soluţie dacă şi numai dacă $\mathrm{Im}[B] \subset \mathrm{Im}[A]$”. Putem scrie astfel că:

$$\exists x \text{ astfel încât } A\overline{R} = \overline{R}x$$

Fie $x = A_1$, ceea ce demonstrează (*).

Lema 2:

$$\mathrm{Im}[B] \subset R$$

$$R = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \mathrm{Im}[B] + \mathrm{Im}\begin{bmatrix} AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \supseteq \mathrm{Im}[B]$$

Demonstraţie:

$$\hat{R} = TR = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \dots & \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_1B_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} A_1^{\,n-1}B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Iar $rgR = rg\hat{R} = rg\begin{bmatrix} A_1 & A_1B_1 & \dots & A_1^{\,n_c-1}B_1 \end{bmatrix}$ pentru că toţi termenii de la puterea $n_c - 1$ încolo sunt combinaţii liniare.

De aici deducem că (A_1, B_1) este controlabilă, deci $n_c = rgR$

Interpretarea lemei 2:

$$\mathrm{Im}[B] \subset \mathrm{Im}\left[\overline{R}\right]$$

de unde deducem că

$$\exists x \text{ astfel încât } B = \overline{R}x$$

Fie $x = B_1$, ceea ce demonstrează (**).

Teorema 2: **Criteriul Hautus de controlabilitate.** Perechea (A, B) este controlabilă dacă şi numai dacă $rg[\lambda I - A \mid B] = n$, $\forall \lambda \in C$.

Demonstraţie:

a) **directa:**

Vom folosi metoda reducerii la absurd. Fie (A, B) controlabilă şi $\exists \lambda$ astfel încât

$$rg[\lambda I - A \mid B] < n. \tag{17}$$

Asta înseamnă că $\exists \xi^T \neq 0$ astfel încât:

$$\xi^T[\lambda I - A \mid B] = 0 \tag{18}$$

Deci avem:

$$\xi^T(\lambda I - A) = 0 \tag{19}$$

$$\xi^T B = 0 \tag{20}$$

Din (19) deducem că:

$$\xi^T A = \lambda \xi^T \tag{21}$$

Calculăm *R*, ţinând seama că $\xi^T B = 0$:

$$\xi^T AB = \lambda \xi^T B = 0$$

...

$$\xi^T A^{n-1} B = (\xi^T A) A^{n-2} B = \lambda \xi^T 0 = 0$$

Însumând relaţiile de mai sus, avem că:

$$\xi^T[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = 0 \tag{22}$$

cu $\xi^T \neq 0$ ceea ce este absurd, deoarece dacă $rg[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] < 0$ avem (A, B) necontrolabilă.

b) **inversa**:

Fie (A, B) necontrolabilă. Atunci $\exists\, T$ astfel încât, din teorema de descompunere controlabilă, avem:

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n = rg[\lambda I - A \mid B] = rg[\lambda l - \hat{A} \mid \hat{B}] = rg\begin{bmatrix} \lambda I_1 - A_1 & -A_3 & B_1 \\ 0 & \lambda I_2 - A_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= rg[\lambda I_1 - A_1 \mid B_1] + rg[\lambda I_2 - A_2] = n_c + n_2 = n$$

ceea ce ar fi absurd.

Observaţie: Operaţionalizarea criteriului Hautus.

Fie:

$$\sigma(A) \stackrel{def}{=} \{\lambda \in C \mid \det(\lambda I - A) = 0\} \tag{23}$$

Dacă $\lambda \notin \sigma(A)$ atunci, evident, $rg[\lambda I - A] = n$ deci şi:

$$rg[\lambda I - A \mid B] = n \tag{24}$$

De aici deducem că singurele numere $\lambda \in C$ pentru care trebuie să verificăm condiţia din criteriul Hautus sunt valorile proprii ale lui A.

Putem enunţa criteriul Hautus astfel:

$$(A, B) \text{ este controlabilă} \Leftrightarrow rg[\lambda I - A \mid B] = n, \forall \lambda \in \sigma(A) \tag{25}$$