

Capitolul 16: Sinteza elementară a sistemelor liniare

16.1 Compensatorul dinamic. Definiție

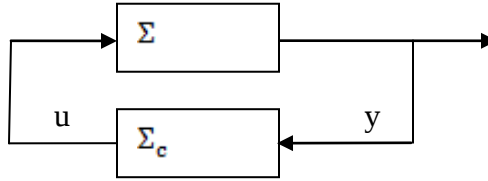
Definiția 1: (Compensator dinamic) Se numește compensator dinamic sistemul (sau modelul matematic) descris de:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = F_c x_c + G_c y \end{cases}, \text{ unde } x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$$

iar matricile sunt : $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times p}$, $F_c \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, $G_c \in \mathbb{R}^{m \times p}$, cu A_c stabilă.

Observație: (Sistemul în circuit închis)

Compensatorul dinamic este un sistem comutat.



$$(2) \quad \text{Definim } x_R = \overset{\text{def}}{\begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}}$$

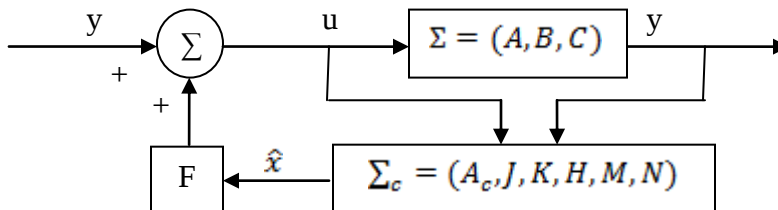
$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = Ax + BF_c x_c + G_c Cx \\ \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y = A_c x_c + G_c Cx \\ y = Cx \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + G_c C & BF_c \\ G_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$(5) \quad \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_R = A_R x_R \\ y = C_R x_R \end{cases}$$

Definiția 2: (Compensatorul stabilizator) Un Compensator dinamic $\Sigma_c = (n_c, A_c, B_c, F_c, G_c)$ care asigură pentru sistemul în circuit închis (5) stabilitatea internă, adică $\sigma(A_R)$ stabilă, se numește compensator dinamic stabilizator.

16.2 Schema de stabilizare cu reacțiile după stare și estimator de stare



Schema 1

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{are legea de comandă } u = F\hat{x} + v$$

unde $\hat{x}$ este generat de estimatorul de stare

$$(7) \quad \begin{cases} \text{##todo} \\ \hat{x} = Mz + Ny \end{cases}$$

Observatie: Pentru simplificarea demonstrațiilor, în cele ce urmează vom folosi estimatorul Kalman. Rezultatele însă rămân valabile pentru orice tip de stare.

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{z} = (A + LC)z - Ly + Bu \\ \hat{x} = z \end{cases}$$

Teorema 1: (Principiul separabilității) Fie $\Sigma = (A, B, C)$ un sistem, legea de comandă $u = F\hat{x} + v$ și estimatorul de stare $\Sigma_e = (J, K, H, M, N)$ conectate ca în schema 1. Pentru sistemul în circuit închis,

$$(9) \quad \sigma(A_R) = \sigma(A + BF) \dot{\cup} \sigma(J)$$

Demonstrație:

$$(10) \quad x_R = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Reunim relațiile #####to do (nu am gasit relatiile 6-8 si am schimbat numerotarea)

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = Ax + BF\hat{x} + By \\ \dot{z} = (A + LC)z - Ly + Bu = (A + LC)z - LCx + BFz + By \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BF \\ -LC & A + LC + BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u$$

$$(13) \quad \Rightarrow A_R \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} A & BF \\ -LC & A + LC + BF \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A_R) &= \det \begin{bmatrix} \lambda I - A & -BF \\ -LC & \lambda I - (A + BF + LC) \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda I - (A + BF) & -BF \\ \lambda I - (A + BF) & \lambda I - (A + BF + LC) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda I - (A + BF) & -BF \\ 0 & \lambda I - (A + LC) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$(14) \quad \det(\lambda I - A_R) = \det(\lambda I - (A + BF)) \det(\lambda I - (A + LC))$$

$$(15) \quad \sigma(A_R) = \sigma(A + BF) \dot{\cup} \sigma(A + LC)$$

Teorema 2: (Invizibilitatea intrare-ieșire a estimatorului de stare) Fie un sistem $\Sigma = (A, B, C)$, legea de comandă după stare $u = F\hat{x} + v$ și estimatorul de stare $\Sigma_e = (J, K, H, M, N)$ conectate ca în schema 1. Matricea de transfer $T_{v \rightarrow y}(\lambda)$ nu depinde de parametrii estimatorului.

Demonstrație:

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = Ax + BF\hat{x} + Bv \\ \dot{z} = (A + LC)z - Ly + Bu = (A + BF + LC)z - LCx + Bv \end{cases}$$

$$(17) \quad \stackrel{def}{e} = z - x$$

$$(18) \quad \dot{z} - \dot{x} = (A + LC)z - (A + LC)x = (A + LC)(z - x)$$

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + BFe + Bv \\ \dot{e} = (A + LC)e \\ y = Cx \end{cases}$$

$$(20) \quad \text{Definim } x_R \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

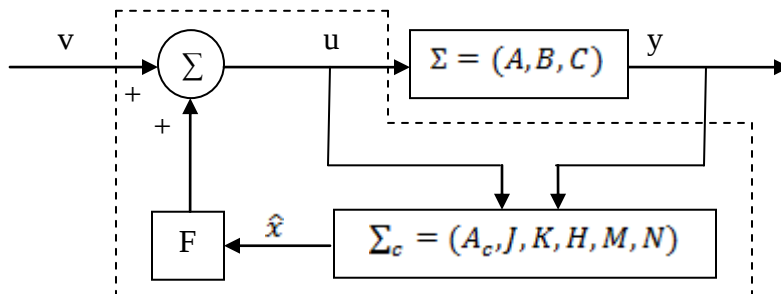
$$(21) \quad \begin{cases} \dot{x}_R = A_R x_R + B_R v \\ y = C_R x_R \end{cases}$$

$$(22) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_{v \rightarrow y}(s) &\stackrel{def}{=} C_R (\lambda I - A_R)^{-1} B_R = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I - (A + BF) & -BF \\ 0 & \lambda I - (A + LC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\lambda I - (A + BF)]^{-1} & * \\ 0 & [\lambda I - (A + LC)]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\lambda I - (A + BF)]^{-1} B \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(23) \quad T_{v \rightarrow y}(s) \stackrel{def}{=} C[\lambda I - (A + BF)]^{-1} B$$

16.3 Compensatorul stabilizator



Observație: În schema 1, putem rearanja elementele pentru a obține un compensator dinamic.

Alegem $x_C \stackrel{def}{=} z$

$$(24) \quad u = Fx_C$$

Estimatorul

$$\begin{cases} \dot{z} = Jz + Ky + Hu \\ \hat{x} = Mz + Ny \end{cases}$$

devine

$$(25) \quad \begin{cases} \dot{x}_C = Jx_C + Ky + Hu \\ \hat{x} = Mx_C + Ny \end{cases}$$

iar legea de comandă

$$(26) \quad u = F\hat{x} = FMx_C + FNy$$

$$(27) \quad \dot{x}_C = Jx_C + Ky + HFMx_C + HFNy = (HJ + HFM)x_C + (K + HFN)y$$

Prin identificare cu compensatorul dinamic obținem:

$$(28) \quad \begin{cases} A_C \stackrel{def}{=} J + HFM \\ B_C \stackrel{def}{=} J + HFN \\ F_C \stackrel{def}{=} FM \\ G_C \stackrel{def}{=} FN \end{cases}$$

Teorema 3: (Compensatorul dinamic) Pentru sistemul $\Sigma = (A, B, C)$ care îndeplinește condițiile:

- a) (A,B) stabilizabilă
- b) (C,A) detectabilă

următorul algoritm furnizează un compensator stabilizator.

Algoritmul compensator stabilizator

Pas 1: Se calculează astfel încât $\sigma(A + BF)$ stabilă.

Pas2: Se calculează un estimator de stare $\Sigma_e = (J, K, H, M, N)$

Pas3: Compensatorul dinamic de ordin $n_c = n_e$ este dat de

$$\begin{cases} A_C = J + HFM \\ B_C = J + HFN \\ F_C = FM \\ G_C = FN \end{cases}$$

Demonstrație:

Pas 1 este posibil deoarece (A,B) este stabilizabilă.

Pas 2 este posibil deoarece (C,A) este detectabilă.

Observația anterioară demonstrează că (A_C, B_C, C_C) este un compensator stabilizator.

Observația 1: Pasul 1 și pasul 2 pot fi inversați. Orice lege de comandă stabilizatoare poate fi cuplată cu orice estimator de stare.

Observația 2: Rezolvarea problemelor de sinteză folosind problemele primare.

Ideea de construcție a compensatorului stabilizator folosind schema 1, adică:

- o lege de comandă stabilizatoare
- implementarea ei cu ajutorul unui estimator de stare

este o idee generală care poate sta la baza rezolvării oricărei probleme de sinteză a sistemelor liniare.

Orice problemă de sinteză (reglarea structural-stabilă, rejecția perturbației, decuplarea, etc.) poate fi rezolvată ca problema primară, deci calculând legi de comandă după stare care satisfac performanțele dorite și implementate cu ajutorul unui estimator de stare. Rezultatele din teorema 3 nu se modifică.

Legea de comandă va fi calculată ca soluție a problemelor de sinteză formulate, iar compensatorul dinamic ca în teorema 3.