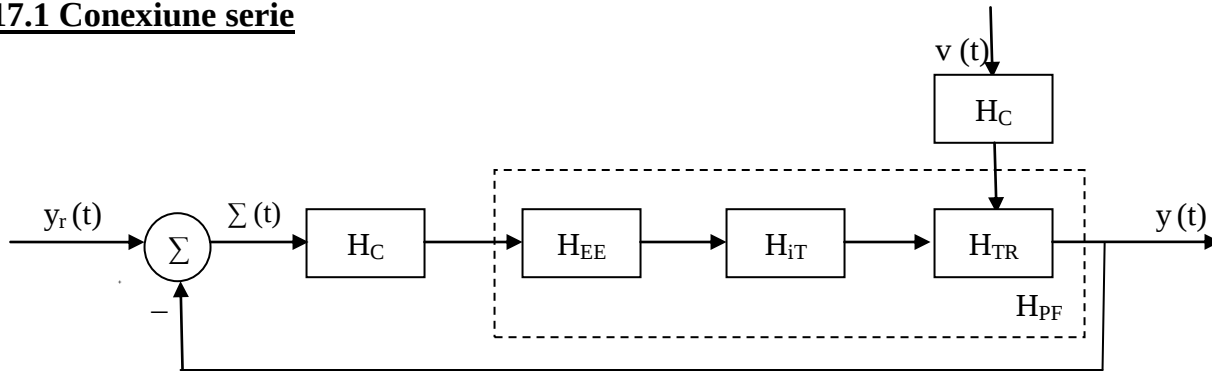


Capitolul 17: Teoria clasică. Abordarea cu funcții de transfer

17.1 Conexiune serie



H_{PF} = parte fixată

H_{EE} = funcție de transfer al elementului de execuție

H_{IT} = funcție de transfer a instalației tehnologice

H_C = funcție de transfer al compensatorului

H_V = funcție de transfer a perturbației

H_{TR} = funcție de transfer al traductorului

$y_r(t)$ = funcția de referință

$v(t)$ = perturbația

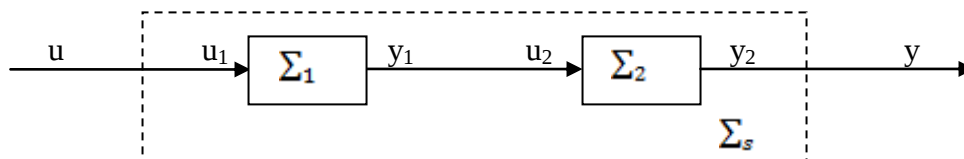
Scop (obiective)

(S) – stabilitatea internă

(R) – reglarea, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ pentru $y_r(t)$ dat

$$(1) \quad \Sigma_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u_1 \\ y_1 = c_1^T x_1 \\ H_1(s) = c_1^T (\lambda I - A_1)^{-1} b_1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \Sigma_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u_2 \\ y_2 = c_2^T x_2 \\ H_2(s) = c_2^T (\lambda I - A_2)^{-1} b_2 \end{cases}$$



Definiția 1: Conexiunea serie

$$(3) \quad \begin{cases} u = u_1 \\ u_2 = y_1 \\ y = y_2 \end{cases}$$

$$y = y_2 = H_2 u_2 = H_2 y_1 = H_2 H_1 u_1 = H_2 H_1 u$$

$$(4) H_s = H_2 H_1$$

$$(5) H_s = \prod_{i=1}^n H_i$$

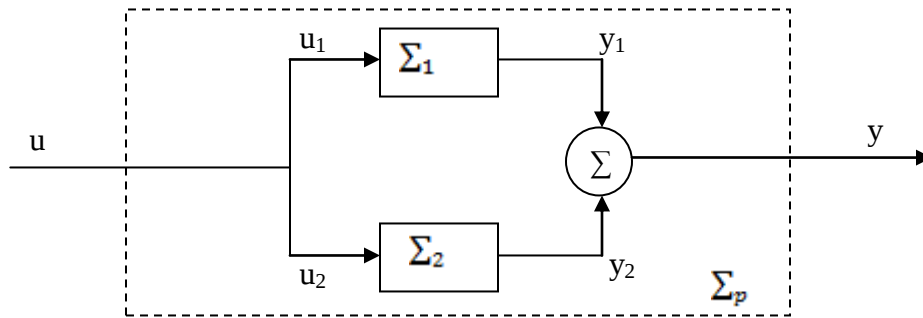
$$(6) x_s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u_2 = A_2 x_2 + b_2 y_1 = A_2 x_2 + b_2 c_1^T y_1 \\ y = y_2 = c_2^T x_2 \end{cases}$$

$$(7) A_s \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2 c_1^T & A_2 \end{bmatrix}, \quad b_s \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_s^T \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} 0 & c_2^T \end{bmatrix}$$

$$(8) \sigma(A_s) = \sigma(A_1) \dot{\cup} \sigma(A_2)$$

Observație: La conexiunea serie, sistemul rezultat este intern stabil dacă și numai dacă Σ_1 și Σ_2 sunt intern stabile.

17.2 Conexiune paralelă



Definiția 2: Conexiunea în paralel

$$(9) \begin{cases} u = u_1 = u_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$y = y_1 + y_2 = H_1 u_1 + H_2 u_2 = H_1 u + H_2 u = (H_1 + H_2) u$$

$$(10) H_p = H_1 + H_2$$

$$(11) H_p = \sum_{i=1}^n H_i$$

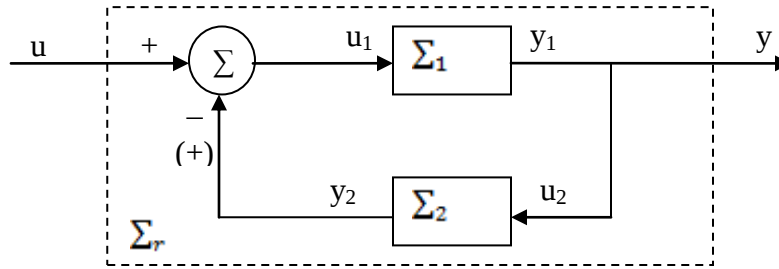
$$(12) x_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u_2 = A_2 x_2 + b_2 u \\ y = y_1 + y_2 = c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \end{cases}$$

$$(13) A_p \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad b_p \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad c_p^T \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} c_1^T & c_2^T \end{bmatrix}$$

$$(14) \sigma(A_p) = \sigma(A_1) \dot{\cup} \sigma(A_2)$$

Observație: Sistemul rezultat în urma conectării în paralel este intern stabil dacă și numai dacă ambele sisteme sunt intern stabile.

17.3 Conexiune în reacție (negativă)



Definiție 3: Conexiunea în reacție

$$(15) \quad \begin{cases} u_1 = u \mp y_2 \\ u_2 = y_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

$$y = y_1 = H_1 u_1 = H_1 (u \mp y_2) = H_1 (u \mp H_2 u_2) = H_1 (u \mp H_2 y)$$

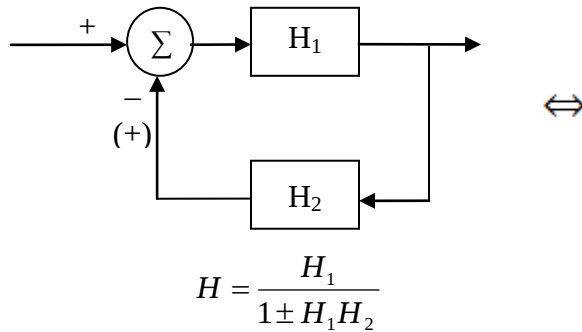
$$y(1 \pm H_1 H_2) = H_1 u$$

$$(16) \quad H_r = \frac{H_1}{1 \pm H_1 H_2}$$

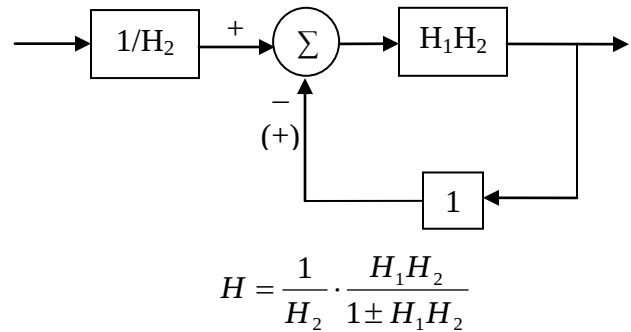
$$(17) \quad x_r = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u_1 = A_1 x_1 + b_1 (u \mp y_2) = A_1 x_1 + b_1 u \mp b_1 c_2^T x_2 \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u_2 = A_2 x_2 + b_2 c_1^T x_1 \\ y = y_1 = c_1^T x_1 \end{cases}$$

$$(18) \quad A_r \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} A_1 & b_1 c_2^T \\ b_2 c_1^T & A_2 \end{bmatrix}, \quad b_r \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_r^T \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} c_1^T & 0 \end{bmatrix}$$

Observație: Problema găsirii lui Σ_2 astfel încât sistemul în circuit închis (sistemul de reglare automată) are soluții.



Schema 1



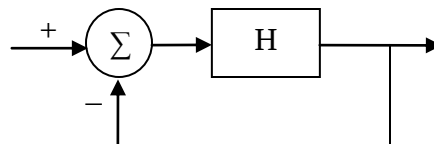
Schema 2

cu reacție rigidă (cu reacție unitară)

Schema 2 este generală și toată teoria clasică este bazată pe aceasta.

Problemele din teoria clasică se reduc de obicei la următoarea schemă:

$$(19) \quad H_0 \stackrel{def}{=} \frac{H}{1 + H}$$

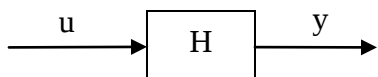


17.4 Proprietățile reacției

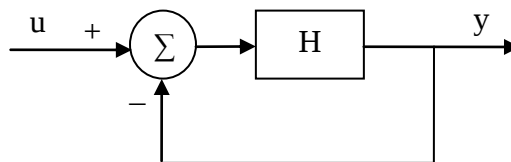
a) Stabilitatea internă

Modificarea stabilității interne a fost justificată din observația legată de forma lui A_r .

b) Desensibilizarea la variații parametrice



$$(20) \quad H(s) = k$$



Pentru sistemul în circuit închis

$$(21) \quad y = Hu = ku,$$

admițând posibilitatea variației parametrului k ,

$$(22) \quad \frac{dy}{y} = \frac{dk}{k},$$

ceea ce arată că variațiile parametrului se transmit în variația ieșirii integral.

Pentru structura cu reacție

$$(23) \quad y = \frac{H}{1+H}u = \frac{k}{1+k}u$$

$$(24) \quad dy = \frac{(1+k)dk - kdk}{(1+k)^2}u = \frac{dk}{(1+k)^2}u$$

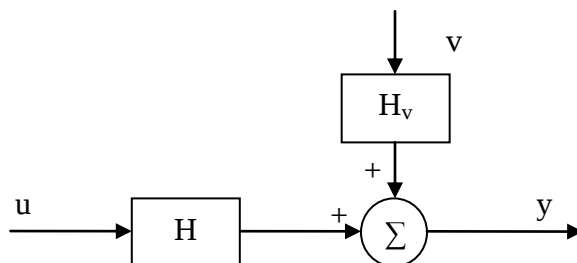
$$(25) \quad \frac{dy}{y} = \frac{dk}{k(1+k)} = \frac{1}{1+k} \cdot \frac{dk}{k} \cong \frac{1}{k} \cdot \frac{dk}{k}$$

k foarte mare

Observație: Variațiile parametrilor k se transmit la ieșire atenuate de k ori. În acest sens, structura cu reacție este robustă pentru că variațiile semnificative ale intrărilor nu se văd în variațiile ieșirilor.

k se numește și factor de amplificare.

c) Rejecția perturbațiilor



Schema 3

$$(26) \quad y = y_u + y_v = H_u + H_v v$$

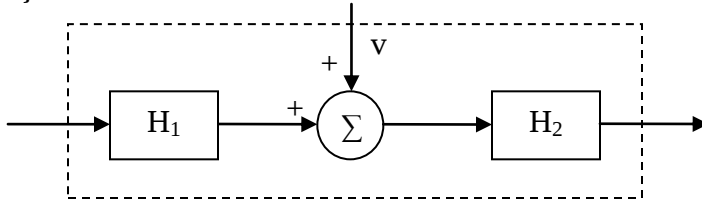
$$(27) \quad u = 0$$

$$(28) \quad y = H_v v$$

$$(29) \quad H_v(s) = k_v \tilde{H}_v(s) \quad \text{cu} \quad \tilde{H}_v(0) = 1$$

k_v este factorul de amplificare în regim staționar.

Observație:



Schema 4

$$H = H_1 H_2$$

Într-o instalație, punctul de aplicare a perturbației, în general, este necunoscut.

$$\alpha) \text{ pe ieșire: } H = H_1 H_2$$

$$H_v = 1$$

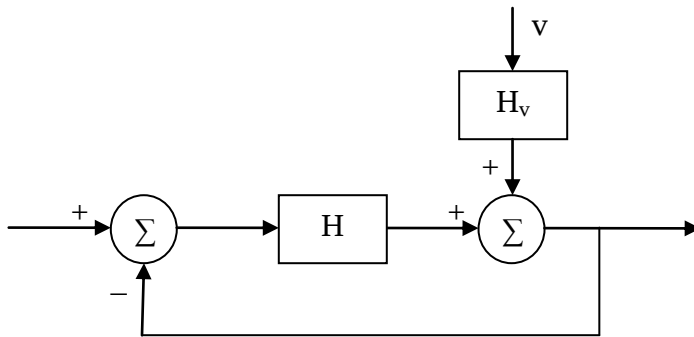
$$\beta) \text{ pe intrare: } H = 1$$

$$H_v = H_1 H_2$$

$$\gamma) \text{ punct oarecare: } H = H_1 H_2$$

$$H_v = H_2$$

În funcție de punctul de aplicare a perturbației în sistem, H_v poate lua valori de la 1 până la H .



Schema 5

$$(30) \quad y = y_u + y_v = \frac{H}{1+H} u + \frac{H_v}{1+H} v$$

$$u = 0$$

$$(31) \quad H_v(s) = k \tilde{H}(s) \quad \text{cu} \quad \tilde{H}(0) = 1$$

k este factorul de amplificare în regim staționar în funcția de transfer inițială.

Considerăm

$$(32) \quad v(s) = \frac{1}{s} \rightarrow \text{treaptă unitară}$$

$$(33) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s y_v(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{H_v(s)}{1+H(s)} v(s) \right] \stackrel{(32)}{=} \frac{k_v}{1+k} \cong \frac{k_v}{k}$$

k foarte mare

În cazul fără reacție

$$(34) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s y_v(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s H_v(s) \frac{1}{s} \right] = k_v$$

Observație: Comparând relația (33) cu relația (34) se observă că perturbația se transmite către ieșire atenuată de k ori.

17.5 Rejecția exactă

$$(35) \quad \text{Fie } H_v(s) = \frac{k\tilde{H}(s)}{s} \text{ cu } \tilde{H}(0) = 1$$

$$(36) \quad \Sigma_{st} \stackrel{def}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} y_v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s y_v(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{H_v(s)}{1 + H(s)} \cdot \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{k_v \tilde{H}_v(s)}{1 + \frac{k\tilde{H}(s)}{s}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s k_v \tilde{H}_v(s)}{s + k\tilde{H}(s)} \right] = 0$$

$$\Sigma_{st} = 0$$

Principiul Modelului Intern

$$\text{Rejecție } \frac{1}{s} \Leftrightarrow H(s) = \frac{1}{s} \cdot H_1(s)$$

Rejecția exactă (eroarea staționară) este 0 dacă și numai dacă funcția de transfer conține modelul semnalului care se dorește a fi rejecat ($\frac{1}{s}$).

Observație: Elementele de comandă în automatizarea clasică (regulatele automate) sunt de trei tipuri: P, PI, PID.

$$H_P(s) = k_P$$

$$H_{PI}(s) = k_{PI} \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

17.6 Reglarea

$$(37) \quad (R) \quad -\Sigma_{st} \stackrel{def}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = 0 \quad \text{pentru } y_r(t) \text{ dat}$$

Observație: Problema este echivalentă cu rejecția exactă a lui y_r și are soluție dacă și numai dacă

$$(38) \quad H_{PF} H_C \stackrel{def}{=} H$$

conține modelul intern al referinței ($\frac{1}{s}$).

$$(39) \quad y_r(s) = \frac{1}{s}$$

$$(40) \quad \Sigma(t) = \frac{1}{1 + H} y_r(t)$$

$$(41) \quad H(s) = \frac{1}{s} \cdot H_1(s) \text{ , } H_1(s) = k_1 \tilde{H}_1(s) \text{ cu } \tilde{H}_1(s) = 1$$

$$(42) \quad \Sigma_{st} \stackrel{def}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \Sigma(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + H} \cdot \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{s} H_1(s)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s}{s + H_1(s)} \right] = 0$$

$$\Sigma_{st} = 0$$

Observație: Reglarea este legată de referință (de modelul intern).

Problema cea mai importantă din teoria sistemelor liniare se numește problema reglării structural stabile.

(S) stabilitatea internă

(R) reglarea $\lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(t) = 0$

(SS) stabilitatea structurală

(S) și (R) să se păstreze în prezența unor variații parametrice.