CURS 2

Capitolul 1: Răspunsul în domeniul timp şi operaţional al sistemelor liniare netede

Fie **sistemul liniar neted**:

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t)\end{cases} x(0) = x_0, t \in T \tag{1}$$

Răspunsul în domeniul timp al unui sistem liniar neted este:

$$x(t) = e^{At}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2}$$

Este evident că răspunsul nu depinde decât de $\Delta t = t - t_0$ şi atunci alegem $t_0 = 0$:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{3}$$

Remarcăm că răspunsul este format din doi termeni:

- $x_l(t) = e^{At}x_0 = x(t)\big|_{u() \equiv 0}$ este răspunsul liber al sistemului, adică răspunsul sistemului în condiţiile în care comanda este identic nulă.
- $x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = x(t)\big|_{x_0 \equiv 0}$ este răspunsul forţat al sistemului, adică răspunsul sistemului în condiţiile în care starea iniţială este identic nulă.

Se poate observa că se aplică **principiul superpoziţiei**, mai exact:

$$x(t) = x_t(t) + x_f(t) = x(t)\big|_{u() \equiv 0} + x(t)\big|_{x_0 \equiv 0} \tag{4}$$

Se numeşte **matricea de tranziţie a stărilor** şi se notează cu $\Phi(t)$ matricea:

$$\Phi(t) \overset{def}{=} e^{At} \overset{def}{=} I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots \tag{5}$$

Folosind această notaţie, putem scrie:

$$x_l(t) = e^{At}x_0 = \Phi(t)x_0 \tag{6}$$

Ieşirea sistemului se obţine din ecuaţia a doua a sistemului (1):

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{7}$$

Şi aici se remarcă doi termeni:

- $y_l(t) \overset{def}{=} Ce^{At}x_0 \overset{def}{=} y(t)\big|_{u() \equiv 0}$ este ieşirea liberă a sistemului, adică ieşirea sistemului în condiţiile în care comanda este identic nulă.
- $y_f(t) \overset{def}{=} \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \overset{def}{=} y(t)\big|_{x_0 \equiv 0}$ este ieşirea forţată a sistemului, adică ieşirea sistemului în condiţiile în care starea iniţială este identic nulă.

Şi aici este valabil **principiul superpoziţiei**, mai exact:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = y(t)\big|_{u() \equiv 0} + y(t)\big|_{x_0 \equiv 0} \tag{8}$$

Definiţie: Se numeşte **matricea pondere** şi se notează cu $T(t)$ matricea definită de:

$$T(t) \overset{def}{=} Ce^{At}B \tag{9}$$

Se poate observa că folosind această notaţie, avem:

$$y_f(t) = \int_0^t T(t-\tau)u(\tau)d\tau \overset{def}{=} (T * u)(t) \tag{10}$$

Dacă aplicăm transformata Laplace ecuaţiilor sistemului (1) obţinem:

$$L[\dot{x}(t)] = sx(s) - x_0 \tag{11}$$

Sistemul se poate rescrie:

$$\begin{cases} sx(s) - x_0 = Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) \end{cases} \tag{12}$$

Astfel, în operaţional, răspunsul sistemului este:

$$x(s) = (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} Bu(s) \tag{13}$$

Se remarcă aici cele două componente ale răspunsului:

- $x_l(s) = (sI - A)^{-1} x_0 \overset{def}{=} x(s)\big|_{u(s)\equiv 0}$ componenta liberă a răspunsului
- $x_f(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s) \overset{def}{=} x(s)\big|_{x_0\equiv 0}$ componenta forţată a răspunsului

Evident, se respectă **principiul superpoziţiei**:

$$x(s) = x_l(s) + x_f(s) = x(s)\big|_{u(s)\equiv 0} + x(s)\big|_{x_0\equiv 0} \tag{14}$$

Observaţie: Din relaţia (6) de mai sus, observăm că:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \tag{15}$$

Observaţie: Metode de calcul al lui e^{At}:

- calculul direct al seriei $e^{At} = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots$, care are sens în mod special atunci când seria are un număr finit de termeni (adică dacă există *k* astfel încât $A^k = A^{k+1} = 0$). În acest caz, matricea se numeşte nil potentă, de exemplu, în cazul unei matrice superior diagonale.
- când există *k* astfel încât $A^k = A^{k+1}$ neidentic nulă (matricea se numeşte idem potentă)
- folosind forma Jordan: dacă $A = TJT^{-1}$, atunci $e^{At} = e^{TJT^{-1}t} = Te^{Jt}T^{-1}$
- $e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right], t \geq 0$

Ieşirea sistemului se scrie:

$$y(s) = Cx(s) = C(sI - A)^{-1} x_0 + C(sI - A)^{-1} Bu(z) \tag{16}$$

Remarcăm cele două componente ale ieşirii:

- $y_l(s) = C(sI - A)^{-1} x_0 \overset{def}{=} y(s)\big|_{u(s)\equiv 0}$ este componenta liberă a ieşirii
- $y_f(s) = C(sI - A)^{-1} Bu(s) = y(s)\big|_{x_0\equiv 0}$ este componenta forţată a ieşirii

Din nou, se observă respectarea principiului superpoziţiei:

$$y(s) = y_l(s) + y_f(s) = y(s)\big|_{u(s)\equiv 0} + y(s)\big|_{x_0\equiv 0} \tag{17}$$

Definiţie: Se numeşte **matricea de transfer** şi se notează cu $T(z)$ matricea definită de:

$$T(s) \overset{def}{=} C(sI - A)^{-1} B \tag{18}$$

Ecuaţia fundamentală a lumii liniare:

$$y(s)\big|_{x_0\equiv 0} = C(sI - A)^{-1} Bu(s) = T(s)u(s) \tag{19}$$

Observaţie: Reversibilitatea timpului.

Din ecuaţia (13) se poate calcula x_0:

$$x(s) = \Phi(s)x_0 + \int_0^t \Phi(s)Bu(s)$$

sau în domeniul timp:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Deoarece $\Phi(t) = e^{At}$ există mereu $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ şi atunci:

$$x_0 = \Phi(-t)x(t) + \int_0^t \Phi^{-1}(t)\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \text{ x} \tag{20}$$

De aici se observă posibilitatea de a îl extrage pe x_0, ceea ce înseamnă că **timpul este mereu reversibil într-un sistem liniar neted**.

Observaţie: Cazul mono intrare - mono ieşire. **Funcţia de transfer** $H(s)$.
Pentru cazul $m = p = 1$ avem:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = c^T x(t) \end{cases}, x(0) = x_0, t \in R \tag{21}$$

$$H(s) \overset{def}{=} c^T (sI - A)^{-1} b \tag{22}$$

Proprietăţile $H(s)$:

- este scalar
- este o raţională strict proprie
- $H(s) = \dfrac{r(s)}{p(s)} = \dfrac{\beta_{n-1}s^{n-1} + ... + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + ... + \alpha_0}$
- descrierea ca schemă ecuaţie diferenţială a sistemului liniar discret

$$y_f(s) = H(s)u(s) = \frac{r(s)}{p(s)}u(s) \text{z} \tag{23}$$

$$y_f(s)p(s) = r(s)u(s) \tag{24}$$

$$\left(s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + ... + \alpha_0\right)y_f(s) = \left(\beta_{n-1}s^{n-1} + ... + \beta_0\right)u(s) \tag{25}$$

Dacă relaţiei de mai sus îi aplicăm transformata Laplace inversă în condiţii iniţial nule, obţinem:

$$y_f^{(n)}(t) + ...\alpha_{n-1}y_f^{(n-1)}(t) + ... + \alpha_0 y_f(t) = p_{n-1}u^{(n-1)}(t) + ... + \beta_0 u(t) \tag{26}$$

- fie $u(t) = u_{-1}(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$. Definim:

$$U(t) \overset{def}{=} \beta_{n-1}u^{(n-1)}(t) + ... + \beta_0 u(t) \tag{27}$$

$$U_1(t) = \beta_1 u'(t) + \beta_0 u(t) = \beta_0 u_{-1}(t) + \beta_1 \delta(t)$$

  Folosirea transformatei Laplace şi a funcţiilor de transfer rezultă şi din abilitatea acesteia de a trata discontinuităţile de speţa 1 pe mărimea de intrare.
- interpretarea lui $H(s)$

$$y_f(s) = H(s)u(s)$$

Dacă considerăm un semnal sinusoidal, $s = j\omega$, atunci:

$$y_f(j\omega) = H(j\omega)u(j\omega)$$

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$$y_f(j\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}u(j\omega) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}e^{j\omega} = H(\omega)e^{j(\omega+\phi(\omega))}$$

Un semnal sinusoidal este amplificat cu un factor de amplificare şi defazat cu o fază $\phi(\omega)$ ceea ce justifică interpretarea lui $H(h\omega)$ ca o admitanţă complexă.

- $u(t) = \delta(t)$ de unde $y_{jf}(s) = H(s)\delta(s) = H(s)$
- $L^{-1}\{H(s)\} = \begin{cases} c^T e^{At} b \overset{def}{=} h(t), matricea\_pondere, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$
- $L^{-1}\{y_f(s)\} \overset{def}{=} h_c(t)$, răspunsul cauzat la impuls. $h_c(t) = \begin{cases} h(t), t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$. unde $h(t)$ este funcţia pondere şi este prelungirea analitică în R a răspunsului cauzat la impuls.