

Capitolul 2: Răspunsul în domeniul timp și operațional al sistemelor liniare discrete

Fie **sistemul liniar discret**:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0, t \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

Unde $x(\cdot)$ $\mathbb{R}^n$ – starea
 $u(\cdot)$ $\mathbb{R}^m$ – intrarea
 $y(\cdot)$ $\mathbb{R}^p$ – ieșire
 A $\mathbb{R}^{n \times n}$, B $\mathbb{R}^{n \times m}$, C $\mathbb{R}^p$

Dacă iterăm ecuația 1 obținem:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax_0 + Bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1) \\ &\dots \\ x(t) &= Ax(t-1) + Bu(t-1) = A^tx_0 + A^{t-1}Bu(0) + \dots + Bu(t-1) \end{aligned} \quad (2)$$

De aici putem deduce răspunsul în domeniul timp al unui sistem liniar discret:

$$x(t) = A^tx_0 + \sum_{i=1}^{t-1} A^{t-i-1}Bu(i) \quad (3)$$

Remarcăm că răspunsul este format din doi termeni:

- $x_l(t) = A^tx_0 = x(t)|_{u(t)=0}$ este răspunsul liber al sistemului, adică răspunsul sistemului în condițiile în care comanda este identic nulă.
- $x_f(t) = \sum_{i=1}^{t-1} A^{t-i-1}Bu(i) = x(t)|_{x_0=0}$ este răspunsul forțat al sistemului, adică răspunsul sistemului în condițiile în care starea inițială este identic nulă.

Se poate observa că se aplică **principiul superpoziției**, mai exact:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = x(t)|_{u(t)=0} + x(t)|_{x_0=0} \quad (4)$$

Se numește **matricea de tranziție a stărilor** și se notează cu $\Phi(t)$ matricea:

$$\Phi(t) \stackrel{def}{=} A^t, \text{ cu } t \geq 0 \quad (5)$$

Folosind această notație, putem scrie:

$$x_l(t) = A^tx_0 = \Phi(t)x_0 \quad (6)$$

Se observă că această relație are aceeași formă ca și în cazul neted.

Ieșirea sistemului se obține din ecuația a doua a sistemului (1):

$$y(t) = Cx(t) = CA^tx_0 + \sum_{i=1}^{t-1} CA^{t-i-1}Bu(i) \quad (7)$$

Și aici se remarcă doi termeni:

- $y_l(t) \stackrel{def}{=} CA^tx_0 \stackrel{def}{=} y(t)|_{u(t)=0}$ este ieșirea liberă a sistemului, adică ieșirea sistemului în condițiile în care comanda este identic nulă.

- $y_f(t) = \sum_{i=0}^{t-1} CA^{t-i-1} Bu(i) \stackrel{\text{def}}{=} y(t) \Big|_{x_0=0}$ este ieșirea forțată a sistemului, adică ieșirea sistemului în condițiile în care starea inițială este identic nulă.

Și aici este valabil **principiul superpoziției**, mai exact:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = y(t) \Big|_{u(t)=0} + y(t) \Big|_{x_0=0} \quad (8)$$

Definiție: Se numește **matricea pondere** și se notează cu $T(t)$ matricea definită de:

$$T(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ CA^{t-1}B, t > 0 \end{cases} \quad (9)$$

Se poate observa că folosind această notație, avem:

$$y_f(t) = y(t) \Big|_{t_0=0} = \sum_{i=0}^{t-1} T(t-1)u(i) \stackrel{\text{def}}{=} (T * u)(t) \quad (10)$$

Dacă aplicăm transformata Z ecuațiilor sistemului (1) obținem:

$$Z[x(t+1)] = zx(z) - zx_0 \quad (11)$$

Sistemul se poate rescrie:

$$\begin{cases} zx(z) - zx_0 = Ax(z) + Bu(z) \\ y(z) = Cx(z) \end{cases} \quad (12)$$

Astfel, în operațional, răspunsul sistemului este:

$$x(z) = (zI - A)^{-1} zx_0 + (zI - A)^{-1} Bu(z) \quad (13)$$

Se remarcă aici cele două componente ale răspunsului:

- $x_l(z) = z(zI - A)^{-1} x_0 \stackrel{\text{def}}{=} x(z) \Big|_{u(z)=0}$ componenta liberă a răspunsului
- $x_f(z) = (zI - A)^{-1} Bu(z) \stackrel{\text{def}}{=} x(z) \Big|_{x_0=0}$ componenta forțată a răspunsului

Evident, se respectă **principiul superpoziției**:

$$x(z) = x_l(z) + x_f(z) = x(z) \Big|_{u(z)=0} + x(z) \Big|_{x_0=0} \quad (14)$$

Observație: Din relațiile de mai sus, observăm că:

$$Z\{x_l(t)\} = x_l(z) \Leftrightarrow Z\{A^t x_0\} = z(zI - A)^{-1} x_0 \Leftrightarrow Z\{A^t\} = z(zI - A)^{-1}$$

de unde se poate scrie că:

$$A^t = Z^{-1} \{z(zI - A)^{-1}\} \quad (15)$$

Ieșirea sistemului se scrie:

$$y(z) = Cx(z) = Cz(zI - A)^{-1} x_0 + C(zI - A)^{-1} Bu(z) \quad (16)$$

Remarcăm cele două componente ale ieșirii:

- $y_l(z) = Cz(zI - A)^{-1} x_0 \stackrel{\text{def}}{=} y(z) \Big|_{u(z)=0}$ este componenta liberă a ieșirii
- $y_f(z) = C(zI - A)^{-1} Bu(z) \stackrel{\text{def}}{=} y(z) \Big|_{x_0=0}$ este componenta forțată a ieșirii

Din nou, se observă respectarea principiului superpoziției:

$$y(z) = y_l(z) + y_f(z) = y(z) \Big|_{u(z)=0} + y(z) \Big|_{x_0=0} \quad (17)$$

Definiție: Se numește **matricea de transfer** și se notează cu $T(z)$ matricea definită de:

$$T(z) \stackrel{\text{def}}{=} C(zI - A)^{-1} B \quad (18)$$

Ecuatia fundamentală a lumii liniare:

$$y_f(z) \Big|_{x_0=0} = C(zI - A)^{-1} Bu(z) = T(z)u(z) \quad (19)$$

Obs Ec fundamentala a lumii linare

$$y_f(z) = y(z) \Big|_{x_0=0} = T(z)u(z)$$

Teoria structurală a sistemelor liniare:

Se poate observa că $T(s) \stackrel{\text{def}}{=} C(sI - A)^{-1} B$ este identică din punct de vedere algebric în cazul neted și în cel discret, și anume este un fascicul matricial. De asemenea, ecuația fundamentală are forma:

$$y_f(\lambda) = T(\lambda)u(\lambda) \quad (20)$$

Marea majoritate a problemelor din Teoria Sistemelor Liniare nu au în vedere aspectul neted sau discret al unui sistem, caracterul algebric fiind predominant asupra celui alt caracter.

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \text{ sau } P_D = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

Observație: Cazul mono intrare - mono ieșire. **Funcția de transfer** $H(z)$.

Pentru cazul $m = p = 1$ avem:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = c^T x(t) \end{cases}, x(0) = x_0, t \in \mathbb{Z} \quad (21)$$

$$H(z) \stackrel{\text{def}}{=} c^T (zI - A)^{-1} b = \frac{r(z)}{p(z)} \quad (22)$$

Proprietățile $H(z)$ ($H(z)$ este identică ca formă cu $H(s)$ ceea ce face ca toate proprietățile acesteia să fie respectate):

- este scalar
- este o rațională strict proprie
- $H(z) = \frac{r(z)}{p(z)} = \frac{\beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_0}$
- descrierea ca schemă cu diferențe finite a sistemului liniar discret

$$y_f(z) = H(z)u(z) = \frac{r(z)}{p(z)}u(z)$$

$$y_f(z)p(z) = r(z)u(z)$$

$$(z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_0)y_f(z) = (\beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_0)u(z)$$

Dacă relației de mai sus îi aplicăm transformata Z în condiții inițiale nule, obținem:

$$y_f(t+n) + \dots + \alpha_{n-1}y_f(t+1) + \dots + \alpha_0 y_1(t) = p_{n-1}y(t+n-1) + \dots + \beta_0 u(t)$$

Observații: Ireversibilitatea timpului pentru Sisteme Liniare Discrete

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi(t-i-1)Bu(i)$$

<A transpus inversabila> $\Leftrightarrow$ <A inversabila>

In general cond generala nu poate fi recuperata. Singura diferenta notabile intre SN si SD dpdv al teoriei sist