Capitolul 3: Discretizarea pe stare a sistemelor liniare

##fig

Problema discretizării pe stare: Fiind dat un SL descris de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, t \in R \tag{1}$$

se cere să se calculeze un model discret $\Sigma_d = (A_d, B_d, C_d)$:

$$\begin{cases} x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_d(k) \\ y_d(k) = C_d x_d(k) \end{cases}, k \in Z \tag{2}$$

astfel încât să avem pentru $u(kh) = u_d(k)$ următoarele relaţii: (3)

$$\begin{cases} x(kh) = x_d(k) \\ y(kh) = y_d(k) \end{cases} \tag{4}$$

=> $u^k(t) = u(kh) pt...t \in [kh,(k+1)h]$

Vom integra de la kh la $(k+1)h$ sistemul:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \text{ x} \tag{5}$$

$$t_0 = kh \tag{6}$$

$$t = (k+1)h \tag{7}$$

Ecuaţia (5) devine:

$$x((k+1)h) = e^{Ah} x(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A((k+1)h-\tau)} Bu(\tau) d\tau \tag{8}$$

Facem schimbarea de variabilă:

$$\theta = (k+1)h - \tau \tag{9}$$

deci avem:

$$\begin{aligned} &\tau = kh \rightarrow \theta = h \\ &\tau = (k+1)h \rightarrow \theta = 0 \\ &u(\tau) = u(kh) \end{aligned} \tag{10}$$

de unde scriem:

$$x((k+1)h) = e^{Ah} x(kh) + \int_0^h e^{A\theta} B d\theta u(kh) \tag{11}$$

Din(4) si 11 avem $x_d(k+1) = e^{Ah} x_d(k) + \int_0^h e^{A\theta} B d\theta u_d(k)$

deci avem următorul sistem discretizat:

$$A_d = e^{Ah} (12)$$

$$B_d \overset{def}{=} \int_0^h e^{A\theta} B d\theta (12)$$

$$(13) y(kh) = Cx(kh) => y_d(k) = Cx_0(k) (14)$$

$$C_d = C(15)$$

Modul discret furnizat de 12 si 15 este adevarat numai pt schema de discretizare din figura. Modificarea tipului de esantionare sau a tipului de refacere a inform va conduce la alte modele discretizate.

Observaţie: Reversibilitatea timpului

$A_d = e^{Ah} = I + \frac{h}{1!}A + \frac{h^2}{2!}A^2 + ...$ este o matrice nesingulară, deci $\Phi(t)$ este nesingulară, deci inversabilă, de unde deducem că timpul este reversibil pentru un Sistem Discret obţinut prin discretizarea unui SLN. Sistemele discrete astfel obţinute moştenesc integral proprietăţile Sistemelor Liniare din care provin.