CURS 4

Capitolul 4: Realizarea de Stare a Sistemelor Liniare

Problema realizării (de stare) (PRS) reprezintă determinarea reprezentării de stare (deci a tripletului (A, B, C) pentru un sistem liniar specificat într-o manieră intrare-ieşire (prin matricea de transfer sau prin matricea de răspuns cauzal la impuls).

Problema realizării de stare se formulează astfel: Fie $T(\lambda) \in R^{p\times m}(\lambda)$ - o matrice de rationale strict proprii. Să se găsească (dacă este posibil) un sistem liniar $\Sigma_n = (n, A, B, C)$ un sistem liniar astfel încât:

$$T(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1} B \qquad (2)$$

unde *n* reprezintă dimensiunea realizării de stare.

Observaţie: Forma standard a unei matrici de transfer $T(\lambda)$.

Fie: $p(\lambda) = cmmmc\{p_{ij}(\lambda)\} = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ (4)

,unde $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,p}$ şi $\alpha_n = 1$.

Atunci înseamnă că putem scrie $T(\lambda)$ astfel:

$$T(\lambda) = \|t_{ij}\| = \left\| \frac{r_{ij}(\lambda)}{p_{ij}(\lambda)} \right\| = \frac{1}{p(\lambda)} \|r_{ij}^*(\lambda)\| \qquad (5)$$

,unde $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,p}$.

<u>Exemplu</u>:

Fie $T(\lambda) = \left\| \frac{1}{2(\lambda+1)} \quad \frac{\lambda-2}{(\lambda+1)\lambda} \right\| = \left\| \frac{0.5}{\lambda+1} \quad \frac{\lambda-2}{(\lambda+1)\lambda} \right\|$.

Atunci, avem:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_0 = 0 \end{cases}$$

, de unde se poate scrie că:

$$T(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \|0.5\lambda \quad \lambda - 2\|$$

Pe de altă parte, însă, avem:

$$T(\lambda) = \frac{1}{p(\lambda)} \|R_0 + R_1\lambda + \ldots + R_{n-1}\lambda^{n-1}\| \qquad (6)$$

unde $R \in R^{p\times m}$.

Continuând exemplul, putem scrie că:

$$T(\lambda) = \frac{1}{p(\lambda)} \left([0 \quad -2] + [0.5 \quad 1]\lambda \right).$$

Teorema 1: Realizarea standard controlabilă. O realizare controlabilă a lui $T(\lambda) \in R^{p\times m}(\lambda)$ de raţionale strict proprii este dată de:

$$A_C = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & \dots & 0_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots. \\ 0_m & 0_m & \dots & I_m \\ -\alpha_0 I_m & -\alpha_1 I_m & \dots & -\alpha_{n-1} I_m \end{bmatrix}, \; B_C = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \dots \\ I_m \end{bmatrix} \text{ şi } C_C = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_{n-1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

unde dimensiunea realizării este:

$$n_C = n \times m \tag{8}$$

unde 0_m şi I_m sunt de dimensiuni $n \times m$.

Demonstraţia este identică în cazurile neted şi discret. Vom analiza doar situaţia cazul unui sistem neted.

$$\begin{cases} \dot{x}_C = A_C x + B_C u \\ y = C_C x \end{cases} \tag{9}$$

Definim $x_C \overset{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$, unde $x_j \in R^m$. Sistemul de la (9) se poate scrie astfel:

$$\begin{cases} \dot{\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & \dots & 0_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_m & 0_m & \dots & I_m \\ -\alpha_0 I_m & -\alpha_1 I_m & \dots & -\alpha_{n-1} I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_m \\ \dots \\ 0_m \\ I_m \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases} \tag{10}$$

Demonstraţia constă în verificarea funcţiei de transfer.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -\alpha_0 x_1 + \dots + -\alpha_{n-1} x_n + u \\ y = R_0 x_1 + \dots + R_{n-1} x_n \end{cases} \tag{11}$$

Aplicând sistemului (11) transformata Laplace pentru $x_0 = 0$ obţinem:

$$\begin{cases} sx_1 = x_2 \\ sx_2 = x_3 \\ \dots \\ sx_{n-1} = x_n \\ sx_n = -\alpha_0 x_1 + \dots + -\alpha_{n-1} x_n + u \\ y = R_0 x_1 + \dots + R_{n-1} x_n \end{cases} \tag{12}$$

Prin substituţii succesive, din sistemul (12) putem obţinem următoarele:

$$\begin{aligned} x_2 &= sx_1 \\ x_3 &= s^2 x_1 \\ &\dots \\ x_n &= s^{n-1} x_1 \end{aligned}$$ de unde rezultă că:

$$\left(s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0\right) x_1 = u \tag{13}$$

Care se mai poate scrie şi astfel:

$$x_1(s) = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0} u(s)$$

Înlocuind în ultima ecuaţie din sistemul (12) obţinem că:

$$y_f(s) = \left(R_0 + sR_1 + \dots + s^{n-1} R_{n-1}\right) x\ (s) \;=>\; y_f(s) = R_0 x_1(s) + \dots + R_{n-1} x_n(s)$$

(14)

Iar dacă introducem şi ecuaţia (13), ajungem la forma:

$$y_f(s) = \frac{R_0 + sR_1 + \dots + s^{n-1} R_{n-1}}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0} u(s) \tag{15}$$

Din ecuaţia (15) putem scrie imediat că:

$$y_f(s) = T(s) u(s)$$

$$T(s) = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0} \left(R_0 + R_1 s + \dots + R_{n-1} s^{n-1}\right) \qquad q.e.d$$

<u>Exemplul</u>:

$$n_C = 2 \times 2 = 4$$

$$A_C = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -\alpha_0 I_2 & -\alpha_1 I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_C = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$C_C = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Teorema 2: Realizarea standard observabilă</u>. O realizare observabilă a lui $T(\lambda) \in R^{p \times m}(\lambda)$ de raţionale strict proprii este dată de:

$$A_O = \begin{bmatrix} 0_p & \dots & 0_p & -\alpha_0 I_p \\ I_p & \dots & 0_p & -\alpha_1 I_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_p & \dots & I_p & -\alpha_{n-1} I_p \end{bmatrix},\ B_O = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \dots \\ R_{n-1} \end{bmatrix} \text{ şi } C_O = \begin{bmatrix} 0_p & 0_p & \dots & I_p \end{bmatrix} \qquad (18)$$

unde dimensiunea realizării este:

$$n_O = n \times p$$

<u>Exemplul</u>:

$$n_O = 2 \times 1 = 2$$

$$A_O = \begin{bmatrix} 0_1 & -\alpha_0 I_1 \\ I_1 & -\alpha_1 I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_O = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$C_O = \begin{bmatrix} 0_1 & I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observatie Problema realizării minimale :

Deoarece in general $m \neq p \Rightarrow n_c \neq n_0$

Problema realizarii minimale Fiind data $T(\lambda) \in R^{pxn}(\lambda)$ o matrice de rationale strict proprii. Sa se gaseaasca daca e posibila o realizare minimala (caciulitia si la suma) $\Sigma_{\tilde{n}} = (\tilde{n}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ avem $\tilde{n} \geq n$ ai pt orice alta realizare a lui $T(\lambda)$, $\Sigma_n = (n, A, B, C)$ n>= n cu caciula

(3)

Minimalitatea trebuie înţeleasă în sensul dimensiunii spaţiului stărilor.

Observatii:

1) RSC

Pentru cazul $m = p = 1$ (sistem cu o intrare şi o ieşire) avem:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases}, \text{->} \Rightarrow T(S) = \frac{\beta_{n-1} S^{n-1} + \dots + \beta_0}{S^n + \alpha_{n-1} S^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

$$\Rightarrow T(\lambda) = \frac{\beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \beta_0}{\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & ... & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \; b_C = \begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_C = [b_c \; A_c b_c .....A_c^{\;n-1} b_c] = \begin{bmatrix} 0.0.....1 \\ .... \\ 0.1...... \\ 1, \alpha_{n-1}..... \end{bmatrix}$$

şi $C_C^{\;T} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad ... \quad \beta_{n-1}]$ (16)

Observăm că matricea A_C este în formă de companion matricial, iar coeficienţii $\alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_{n-1}$ sunt coeficienţii polinomului caracteristic.

Matricea A_C este ciclică.

Faptul că

$$R_c \overset{def}{=} [b_C \quad A_C b_C \quad ... \quad A_C^{n-1} b_C] \tag{17}$$

este de rang maximal face ca realizarea să fie controlabilă ($rang(R) = n_C$), care este criteriul de controlabilitate.

2) RSO

Pentru cazul $m = p = 1$ (sistem cu o intrare şi o ieşire) avem:

$$A_O = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & ... & 0 & -\alpha_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \; b_O = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ ... \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \text{ şi } c_O^{\;T} = [0 \quad ... \quad 0 \quad 1] \tag{19}$$

Faptul că

$$Q \overset{def}{=} \begin{bmatrix} c_0^{\;T} \\ c_0^{\;T} A_0 \\ ... \\ c_0^{\;T} A_0^{\;n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & 1 & * \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & ... & * & * \end{bmatrix} \neq 0 \tag{20}$$

este de rang $rg(Q) = n$ face ca realizarea să fie observabilă.

<u>**Principiul dualităţii**</u>**.**

$$\sum{}_c = (A_c, b_c, c_c^{\;t}) \xrightarrow{T} \sum{}_0 = (A_0, b_0, c_0^{\;T})$$

$$A_c^{\;t}.c_c, b_0^T$$

Fie $H(\lambda)$. Scriem că:

$$H(\lambda)=c_C^T(\lambda I_C-A_C)^{-1}b_C=H^T(\lambda)=\left[c_C^T(\lambda I_C-A_C)^{-1}b_C\right]^T=b_C^T\left(\lambda I-A_C^T\right)^{-1}c_C \quad (21)$$

Pe de altă parte, avem:

$$H(\lambda)=c_O^T(\lambda I-A_O)^{-1}b_O \quad (22)$$

Din (21) şi (22) putem scrie că:

$$\Sigma_C=\left(A_C,b_C,c_C^T\right)=\Sigma_O\left(A_C^T,c_C,b_C^T\right) \quad (23)$$

$\xrightarrow{u} unpatrat(H) \xrightarrow{y}$ $\quad \xrightarrow{y} unpatrat(?) \xrightarrow{u}$

Obs : RSC si RSO sunt controlabile , respectiv observabile.

m=p=1 det($\lambda I-A_c$) =det(SI- $\lambda I-A_0$) $=\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+...+\alpha_0$

Capitolul 5: Echivalenţa Sistemelor Liniare

Definiţia 1: Două sisteme $\Sigma=(n,A,B,C)$ şi $\hat{\Sigma}=\left(n,\hat{A},\hat{B},\hat{C}\right)$ se numesc echivalente dacă există un izomorfism $T:R^n\to R^n$ astfel încât:

$$\hat{A}=TAT^{-1}$$
$$\hat{B}=TB \quad (1)$$
$$\hat{C}=CT^{-1}$$

Observăm că relaţia de echivalenţă este o schimbare de coordonate în spaţiul stărilor:

$$\hat{x}=Tx \quad (2)$$

Definiţia 1 descrie o relaţie de echivalenţă. Astfel, această relaţie trebuie să fie:

- simetrică: $\sum_n \overset{T}{\sim} \hat{\Sigma} => \hat{\Sigma} \overset{T^{-1}}{\sim} \Sigma_n$
- tranzitivă: $\Sigma_1 \overset{T_1}{\sim} \Sigma_2$ şi $\Sigma_2 \overset{T_2}{\sim} \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1 \overset{T_2T_1}{\sim} \Sigma_3$
- reflexivă: $\Sigma_n \overset{I_m}{\sim} \Sigma_n$ => T= In

Se poate spune astfel că, de fapt, atunci când lucrăm cu un sisteme liniare, numerele cu care lucrăm sunt reprezentantul unei clase.

Teorema 1: Două sisteme $\Sigma_n=(A,B,C)$ şi $\hat{\Sigma}_n=\left(\hat{A},\hat{B},\hat{C}\right)$ echivalente cu iniţializări echivalente (asemenea) $\hat{x}_0=Tx_0$ şi aceeaşi intrare au ieşiri egale şi evoluţii pe stare echivalente.

$$\hat{x}(t)=Tx(t) \quad (3)$$
$$\hat{y}(t)=y(t)$$

Demonstraţie:

Din $\Sigma\sim\hat{\Sigma}$ deducem că $\exists T$ astfel încât $\hat{A}=TAT^{-1},\hat{B}=TB,\hat{C}=CT^{-1}$.

Se poate scrie, deci, că:

$$\hat{x}(t)=e^{\hat{A}t}\hat{x}_0+\int_0^t e^{\hat{A}(t-\tau)}\hat{B}u(\tau)d\tau= \quad (4)$$

$$\hat{x}(t) = e^{TAT^{-1}t}Tx_0 + \int_0^t e^{TAT^{-1}(t-\tau)}TBu(\tau)d\tau =$$

$$\hat{x}(t) = Te^{At}T^{-1}Tx_0 + \int_0^t Te^{A(t-\tau)}T^{-1}TBu(\tau)d\tau =$$

$$\hat{x}(t) = Te^{At}x_0 + \int_0^t Te^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau =$$

$$\hat{x}(t) = T\left(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) =$$

$$\hat{x}(t) = Tx(\mathrm{t}) \qquad (5)$$

Similar, demonstrăm că:

$$\hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t) = C(T^{-1}T)x = Cx(t) = y(t) \quad \text{(iesiri egale)} \qquad (6)$$

Definiţia 2: Echivalenţa intrare-ieşire (I/E). Două sisteme $\Sigma = (n, A, B, C)$ şi $\Sigma^* = (n^*, A^*, B^*, C^*)$ sunt echivalente intrare-ieşire dacă au aceeaşi matrice de transfer.

$$C^*\left(\lambda I_{n^*} - A^*\right)^{-1}B^* = C(\lambda I_n - A)^{-1}B = T(\lambda) \qquad (10)$$

Observaţie: $n^* \neq n$.

Definiţia 2 descrie o relaţie de echivalenţă. Astfel, această relaţie trebuie să fie:

- simetrică: $\Sigma_1 \sim \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 \sim \Sigma_1$ (prin identitate)
- tranzitivă: $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ şi $\Sigma_2 \sim \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1 \sim \Sigma_3$
- reflexivă $\Sigma_n \sim \Sigma_n \Rightarrow T = In$

Obs(Relatii echivalente)
Obs echivalenta => echiv intr – iesire
2 sisteme echivalente sunt echiv si intrare –iesire

Reciproca propoziţiei 2 este falsă.

Relaţia de echivalenţă conservă:

a) $\sigma(A) - spectrul$ lui A

$\sigma(A) = \{\lambda \in C \mid \det(\lambda I - A) = 0\}$

$\sigma(A) = \sigma(TAT^{-1}) = \sigma(A)$

b) rang B si rang C

$\dot{x} = Ax + Bu$

Obs $y = Cx + Du$

$T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$