CURS 5

Capitolul 6: Accesibilitatea Sistemelor Liniare

Fie sistemul liniar discret descris de:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, x(0) = x_0, t \in Z \qquad (1)$$

Ne vom ocupa de legatura intre comanda si stare(de perechea (A,B))

Raspunsul in domeniul timp:

$$x(t) = A^t x_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-i-1} Bu(i) \qquad (2)$$

Consideram:

$$x_0 \equiv 0 \qquad (3) \Rightarrow$$

=> putem scrie ecuaţia (2) astfel:

$$x(t) = A^{t-1}Bu(0) + ... + Bu(t-1) = \begin{bmatrix} B & AB & ... & A^{t-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ ... \\ u(0) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Definitia 1. Secvenţa de comanda de lungime k: $u_k \overset{def}{=} \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ ... \\ u_0 \end{bmatrix}$ (5)

Definitia 2. Matricea de accesibilitate a lui T **în** k **paşi**: $R_k \overset{def}{=} \begin{bmatrix} B & AB & ... & A^{k-1}B \end{bmatrix}$ (6)

Problema 1 (accesibilitate in k pasi):

Fiind data o stare $x \in R^n$ sa se gaseasca (daca este posibil) secventa de comanda u_k care ne transfera in k pasi din x_0 in $x_f = x$, unde $x = R_k u_k$

Definiţia 3: O stare $x \in R^n$ este accesibilă în k paşi dacă există o comandă u_k astfel încât:

$$x = R_k u_k \qquad (7)$$

Observaţie(sisteme de ecuatii liniare):

Fie $Ax = b$, **cu** $A \in R^{m\times n}, x \in R^n, b \in R^m$.

Următoarele 3 afirmatii sunt echivalente:

a) $\exists$ x a.i $Ax = b$ sistem compatibil
b) $rg[A \mid b] = rg[A]$ (teorema Kroenecker - Capelli)
c) $b \in \operatorname{Im} A$ (teorema Rouche)

,unde $\operatorname{Im}[A] \overset{def}{=} \left\{ y \in R^n \mid \exists \lambda_i a.i y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right\} \in R^m$

Obs. Sist. Ax=b :

a) <compatibil> ⇔ <b $\in$ Im[A]>
b)<compatibil det.> ⇔ <b $\in$ Im[A], rgA = n>
Solutie unica
c)<compatibil nedet.> ⇔ <b $\in$ Im[A], rgA < n>
O infinitate de solutii
rgA = m => A este epica, surj.

Obs. (Inversa generalizata – pseudoinversa lui A)

Fie Ax = b , cu A monica(rgA = n)
A^T = epica
$A^T Ax = A^T b$
$A^T A$ nesingulara

$$\mathbf{x = (A^T A)^{-1} A^T b}$$

$\mathbf{A^{\#} = (A^T A)^{-1} A^T b}$, b $\in$ Im[A] => x-solutie
b nu $\in$ Im[A] => solutie in sensul celor mai mici patrate

rgA = n

Obs. Operatii cu subspatii vectoriale:

Fie u = Im[U]
v = Im[V]

a) u<v ⇔ rg[UIV] = rgV
b) u=v ⇔ u inclus in v si v inclus in u
c) u+v = Im[U,V]

Definiţia 4: Subspaţiul accesibil în *k* paşi se notează R_k şi este dat de:

$$\mathcal{R}_k = \operatorname{Im} R_k = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \tag{8}$$

Propoziţia 1: $x \in R^n$ este accesibilă în *k* paşi dacă şi numai dacă $x \in \mathcal{R}_k$ (9)

Demonstraţie: <*x* este accesibilă in k pasi> ⇔ < $\exists u_k$ astfel încât $x = R_k u_k$ > $\overset{T.Rauche}{\Leftrightarrow}$ < $x \in \operatorname{Im} R_k = \mathcal{R}_k$ >

Lema 1: Subspaţiile $\{\mathcal{R}_k\}_{k \in N^*}$ formează un lanţ crescător de limită $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_n$, adica

$$\operatorname{Im} B = \mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{R}_t \subseteq \mathcal{R}_{t+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n+1} = \ldots = \mathcal{R}_\infty$$

Demonstrație lema 1:

a) $R_t \subseteq R_{t+1}, \forall t$

b) $R_{n+\gamma} \supseteq R_n, \forall \gamma$

a)

$$R_{k+1} \overset{def}{=} \mathrm{Im}\left[B \quad \ldots \quad A^{k-1}B \quad A^k B\right] = \mathrm{Im}\left[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{k-1}B\right] + \mathrm{Im}\left[A^k B\right] =$$
$$= R_k + \mathrm{Im}\left[A^k B\right]$$

de unde: $R_k \subseteq R_{k+1}$ (I)

b)

Știm că:

$$R_{n+1} \overset{def}{=} \mathrm{Im}\left[B \quad AB \quad \ldots \quad A^n B\right] = \mathrm{Im}\left[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right] + \mathrm{Im}\left[-\alpha_0 I - \alpha_1 A \ldots\ldots - \alpha_{n-1}A^{n-1} - A^n\right]$$

(II)

Fie $x_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ polinomul caracteristic al lui *A*.

$$x_A(A) = 0 \Rightarrow A^n + \ldots + \alpha_0 I = 0$$

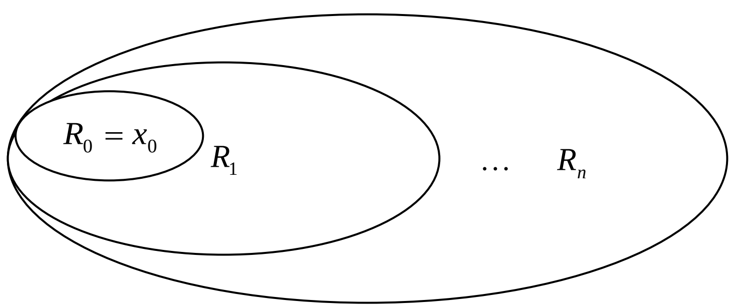
(orice matrice își verifică propriul polinom caracteristic)

$$A^n = -\alpha_0 I - \alpha_1 A - \ldots - \alpha_{n-1}A^{n-1}$$

de unde obținem că:

$$\mathrm{Im}\left[A^n B\right] = \mathrm{Im}\left[\alpha_0 B - \alpha_1 AB - \ldots - \alpha_{n-1}A^{n-1}B\right] \subseteq \mathrm{Im}\left[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right] = \mathrm{Im}\, R_n \text{ (III)}$$

Observație: Interpretarea subspațiilor R_k



Definiția 5: O stare x ce aparține lui R^n este accesibilă dacă $\exists k \in N^*$ astfel încât *x* este accesibilă în *k* pași.

Propoziția 2: O stare $x \in R^n$ este accesibilă dacă și numai dacă $x \in R_n$

Demonstrație: <*x* este accesibilă> => <exista k a.i *x* este accesibilă în *k* pași> $\overset{def3}{=} <\exists u_k$ astfel încât $x = R_k u_k > \overset{TRouche}{\Rightarrow} < x \in R_k = \mathrm{Im}\, R_k > \overset{Lema1}{\Rightarrow} < x \in \mathrm{Im}\, R_n = R_n >$

Definiția 6: Subspațiul accesibil *R* este dat de:

$$R \overset{def}{=} R_n \overset{def}{=} \operatorname{Im} R_n = \operatorname{Im}\left[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right]$$

Definiţia 7: Un sistem $\Sigma = (A, B, C)$ (o pereche (A, B)) este accesibil dacă toate stările sale sunt accesibile.

Teorema 1: (Criteriul de accesibilitate) Un sistem $\Sigma = (A, B, C)$ sau o pereche (A, B) este accesibil(ă) dacă şi numai dacă $rg\left[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right] = n$

Demonstraţie: $<\Sigma = (A, B, C)$ este accesibil> $<\overset{def}{=}>$ <toate stările sale sunt accesibile> $\Leftrightarrow$ $R \equiv R^n \Leftrightarrow rgR_n = n \Leftrightarrow rg\left[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right] = n$

Obs.(Controlabilitatea sistemelor liniare)

Problema controlabilităţii sistemelor liniare: Fie $x \in R^n$. Sa se gaseasca (daca este posibil) u_k astfel incat $x_f = 0$.

$$x = A^k x_0 + R_k u_k$$

Exista u_k solutie a ecuatiei =>

$$0 = A^k x + R_k u_k$$

$$-A^k x = R_k u_k$$

Ce se intampla cu o stare accesibila(subspatiul accesibil)

$$R_n u_n = A^n x$$

$$R_0 \overset{def}{=} A^{-n} R = A^{-1}\left(\ldots\left(A^{-1}R\right)\ldots\right) \supseteq R$$

R_0, subspatiul controlabil este mai mare decat subspatiul starilor accesibile.
Sa observam ca daca matricea A este inversabila, atunci $R_0 = R$, deci o stare accesibila este si controlabila, si reciproc, ceea ce se intampla de exemplu pentru sistemele discretizate.
Acest fapt va justifica folosirea intr-o asemenea directie a unei unice notiuni , aceea de controlabilitate. Vom spune stare controlabila, subspatiu controlabil, matrice de controlabilitate, sistem sau pereche controlabila.

Obs. (Unificarea cazului neted cu cel discret)

Daca in Def.5 am modifica:

x ce aparţine lui R^n este accesibilă dacă $\exists u_k$ astfel încât $x = R_k u_k$

, atunci tot ceea ce urmeaza s-ar potrivi si cazului neted.
In cazul sistemelor netede nu exista nici o diferenta intre accesibil si controlabil, deoarece o stare accesibila este si controlabila, ceea ce justifica suplimentar folosirea unei singure notiuni.