Facultatea de Automatica si Calculatoare, Universitatea Politehnica din Bucuresti

Computer Science & Engineering Department

Examen Partial MN

Student: _______________	**Grupa:** ________

Descriere curs:	**MN, An I, Semestrul II**
Titlu curs:	**Metode Numerice**
Profesor:	**Conf.dr.ing. Florin POP**
Durata examenului:	90 minute
Tip Examen:	**Closed Book**
Materiale Aditionale:	**Nu! Fara telefoane mobile!!!**
Numar pagini:	________________

Rezultate Examen	
Subiect	Punctaj
1	/2
2	/2
3	/2
4	/2
5	/2
$\sum$	/10

Subiecte (Numarul 2)

2 puncte **1.** **P**artea 1 [1.0p]. Fie matricea `A = [1 2 0; 2 5 2; 0 2 5]`. Determinati factorizarea Cholesky $A = L \times L^T$. Folosind aceasta factorizare, rezolvati sistemul de ecuatii $Ax = b$, unde `b = [-1 -1 3]`^{T}.

Partea 2 [1.0p]. Deduceti formulele generale ale factorizarii Cholesky $A = L \times L^T$ si scrieti o functie Matlab `function [L] = cholesky(A)` care implementeaza aceasta factorizare.

Bonus [0.4p]. Daca presupunem cunoscuta factorizarea Cholesky $A = L \times L^T$, prezentati o metoda numerica de factorizare Cholesky pentru matricea $\overline{A} = \begin{bmatrix} A & u \\ u^T & a \end{bmatrix}$ unde u este un vector si a este un scalar. Ce restrictii apar?

2 puncte **2.** **P**artea 1 [0.5p]. Prezentati pe scurt metoda iterativa Gauss-Siedel pentru rezolvarea unui sistem liniar de ecuatii. Care sunt avantajele unei metode iterative?

Partea 2 [1.5p]. Scrieti o functie Matlab care rezolva un sistem liniar de ecuatii prin metoda iterativa Gauss-Siedel: `function [x xit] = gs(A,b,x,e,maxit)`. Semnificatia parametrilor este: `A` - matrice coeficienti sistem liniar, `b` - vector termeni liberi, `x` - vectorul aproximatiei initiale a solutiei si final vectorul solutie, `e` - toleranta admisa, `maxit` - numarul maxim de iteratii admise, `xit` - matrice avand linia `k` solutia la pasul de iteratie `k`.

Bonus [0.4p]. Demonstrati ca daca $\rho(A) < 1$, atunci $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

2 puncte **3.** **P**artea 1 [1.0p]. Un vector $x \in R^n$ poate fi adus la un vector de norma 1 prin impartirea cu norma sa. Fie reflectorii Householder $U = I_n - 2uu^T$ si $V = I_n - vv^T$, cu $||u||_2 = 1$ si $||v||_2 = \sqrt{2}$. Calculati Uu si Vv. Construim $x = u + \frac{v}{||v||_2}$ si $H = I_n - xx^T$. Ce conditie trebuie sa impunem pentru ca H sa fie reflector ortogonal.

Partea 2 [1.0p]. Dati un exemplu numeric de vectori $u, v \in R^2$ care respecta conditiile descrise in Partea 1. Calculati reflectorii U, V si H.

Bonus [0.4p]. Este posibil ca $||x + y||_p = ||x||_p + ||y||_p$ pentru $p = 1, 2, \infty$? Justificati.

2 puncte **4.** **P**artea 1 [1.0p]. Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$. Calculati valorile proprii si vectorii proprii normati. Efectuati o iteratie pentru metoda directa a puterilor pornind cu `y = [1 0]`^{T} si comparati rezultatul cu cel exact (valoarea proprie si vectorul propriu corespunzator). Schitati numeric metoda puterii inverse pentru acest exemplu.

Partea 2 [1.0p]. Scrieti o functie MATLAB care implementeaza metoda inversa a puterii. Explicati pe scurt efectul catului Rayleigh.

Bonus [0.3p]. Fie A si B doua matrici ortogonal echivalente, adica $B = P^T * A * Q$, unde P si Q sunt ortogonale. Aratati ca A si B au aceleasi valori singulare si calculati vectorii singulari ai lui B in functie de vectorii singulari ai lui A.

2 puncte **5.** **P**artea 1 [1.0p]. Fie functia $f(x)$ data prin $x = [-1, 0, 1, 2]$ si $f(x) = [5, 0, 1, 2]$. Calculati polinomul Lagrange de interpolare si scrieti expresia erorii. Calculati pe baza polinomului Lagrange $f(\frac{1}{2})$.

Partea 2 [1.0p]. Scrieti o functie MATLAB pentru calculul polinomului Lagrange intr-un punct a.

Bonus [0.4p]. Aratati ca multiplicatorii Lagrange sunt invarianti la transformarile liniare si ca $\sum_{i=1}^{n} L_i(x) = 1$.

Hoteles
CATALONIA
Buenos Hoteles

NUMĂRUL 2

SUBIECTUL 1.

a) $A = L \times L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

- $l_{11}^2 = 1 \Rightarrow \underline{l_{11} = \pm 1}$, $l_{11} l_{21} = 2 \Rightarrow \underline{l_{21} = \pm 2}$,
  $l_{11} l_{31} = 0 \rightarrow \underline{l_{31} = 0}$
- $l_{21} l_{11} = 2 \Rightarrow \underline{l_{21} = \pm 2}$, $l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \Rightarrow \underline{l_{22} = \pm 1}$,
  $l_{21} l_{31} + l_{32} l_{22} = 2 \Rightarrow \underline{l_{32} = \pm 2}$

(factorizarea Cholesky are mai multe soluții, alegem soluția pozitivă)

$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Rezolvarea sistemului $Ax = b$ prin metoda Cholesky presupune:

$Ly = b$ și $L^T x = y$.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = -1. \\ 2y_1 + y_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 1 \\ 2y_2 + y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -1. \\ x_1 + 2x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Pentru factorizarea Cholesky avem

$A = L \times L^T \Rightarrow A_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{ik} \underbrace{L_{jk}}_{\text{din } L^T}$

pt $i = j \Rightarrow L_{ii} = \left(A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2 \right)^{1/2}$ $(i = 1:n)$

și $L_{ij} = \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right) / L_{jj}$, $j = 1 : i-1$

Central de reservas
902 30 10 78

Funcția Matlab este:

```
function [L] = cholesky(A)
    [n n] = size(A)
    for i = 1:n
        A(i,i) = sqrt( A(i,i) - sum(A(i,1:i-1).^2));
        for j = 1:i-1
            s = A(i,1:j-1)*A(j,1:j-1)';
            A(i,j) = (A(i,j)-s)/A(j,j);
        end
    end
    L = tril(A);
```

c) Pentru matricea $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & u \\ u^T & a \end{bmatrix}$ presupunem că factorizarea Cholesky se scrie:

$$\bar{A} = \bar{L} \times \bar{L}^T = \begin{bmatrix} B & 0 \\ v^T & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B^T & v \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

unde B este o matrice inferior triunghiulară, v un vector nenul și b un scalar nenul. Din inmulțire rezultă:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} BB^T & Bv \\ v^T B^T & v^T v + b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & u \\ u^T & a \end{bmatrix}$$ de unde avem:

$BB^T = A = LL^T$, deci o posibilă soluție este $\boxed{B = L}$

$Bv = u$ și $v^T B^T = u^T$ sunt echivalente $\Rightarrow$ $\boxed{v = L^{-1} u}$

$v^T v + b^2 = a$ $\Rightarrow$ $\boxed{b = \pm\sqrt{a - v^T v}}$, soluție valabilă numai dacă $a > v^T v$, deci avem:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ (L^{-1} u)^T & \sqrt{a - v^T v} \end{bmatrix}$$

Hoteles
CATALONIA
Buenos Hoteles

NUMĂRUL 2

SUBIECTUL 2

a) Metodele iterative presupun descompunerea matricei sistemului sub forma $A = N - P$. Vom partiționa matricea sistemului sub forma $A = D - L - U$. In metoda Gauss-Siedel se aleg:

$$N = D - L$$
$$P = U$$
$$\Rightarrow G = (D-L)^{-1} U \quad , \quad c = (D-L)^{-1} b$$

obtinem

$$(D-L)x^{(p+1)} = Ux^{(p)} + b$$
$$x_i^{(p+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(p+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(p)}\right) / a_{ii}$$

Principalul avantaj al unei metode iterative îl reprezintă complexitatea pătratică $O(n^2)$ și convergența garantată dacă $\rho(G) < 1$. Alegerea corectă pentru aproximația inițială poate accelera mult ~~o~~ metoda iterativă.

b)
```
function [x xit] = gs(A, b, x, e, maxit)
    [n n] = size(A); x0 = x;
    for k = 1 : maxit
        for i = 1 : n
            s1 = A(i, 1:i-1) * x(1:i-1);
            s2 = A(i, i+1:n) * x0(i+1:n);
            x(i) = (b(i) - s1 - s2) / A(i,i);
        end
```

Central de reservas
902 30 10 78

```
xit(k,1:n) = x;
p = norm(x-x0,1);   g = norm(x0);  x0 = x;
if p < e*g
    break;
end
end
```

c) Fie $S_m = \sum_{k=0}^{m} A^k = I + A + A^2 + \dots + A^m$

$$(I-A)S_m = I + A + A^2 + \dots + A^m - A - A^2 - \dots - A^m - A^{m+1} = I - A^{m+1}.$$

trecem la limită și

$$\lim_{m\to\infty}(I-A)S_m = \lim_{m\to\infty}(I - A^{m+1}) = I - \underbrace{\lim_{m\to\infty} A^{m+1}}_{0 \text{ deoarece } \rho(A)<1} = I_n$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

NUMĂRUL 2. SUBIECTUL 3.

a) $Uu = (I_n - 2uu^T)u = u - 2u\underbrace{u^Tu}_{1} = u - 2u = -u$

$Vv = (I_n - vv^T)v = v - v\underbrace{v^Tv}_{2} = v - 2v = -v.$

$x = u + \frac{v}{\|v\|_2}$. Calculăm x^Tx.

$$x^Tx = \left(u + \frac{v}{\|v\|_2}\right)^T\left(u + \frac{v}{\|v\|_2}\right) = \left(u^T + \frac{v^T}{\|v\|_2}\right)\left(u + \frac{v}{\|v\|_2}\right) =$$

$$= u^Tu + \frac{v^Tv}{\|v\|_2^2} + \frac{u^Tv + v^Tu}{\|v\|_2} = 1 + 1 + \frac{u^Tv + v^Tu}{\|v\|}$$

$$\Rightarrow x^Tx = 2 + \frac{u^Tv + v^Tu}{\|v\|}.$$

Condiția ca H să fie reflector ortogonal este:

$$HH^T = (I_n - xx^T)(I_n - xx^T)^T = (I_n - xx^T)(I_n - xx^T) =$$

Hoteles CATALONIA Buenos Hoteles

$= I_n - xx^T - xx^T + xx^Txx^T = I_n - 2xx^T + x\underbrace{x^Tx}x^T$

$= I_n \Rightarrow x^Tx = 2 \Rightarrow u^Tv = v^Tu = 0$

deci condiția necesară și suficientă este ca $u \perp v$.

b) $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$U = I_2 - 2uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1, 0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

$V = I_2 - vv^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}[0 \ \sqrt{2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

$x = u + \frac{v}{\|v\|_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$H = I_n - xx^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[1 \ \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

f) • $p = 1$ $\quad x = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ și $y = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ atunci

$\left.\begin{array}{l} \|x+y\|_1 = 2 \\ \|x\|_1 = 1, \ \|y\|_1 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1.$

• $p = \infty$ $\quad x = e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ și $y = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$\left.\begin{array}{l} \|x+y\|_\infty = \max\{1, 2\} = 2 \\ \|x\|_\infty = 1, \ \|y\|_\infty = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \|x+y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Central de reservas
902 30 10 78

• pentru $p=2$, sau in general $p \neq 1, \infty$ egalitatea este posibilă numai pentru vectori coliniari, datorită inegalității triunghiului.

NUMĂRUL 2. SUBIECTUL 4

a) $|A - \lambda I_2| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(7-\lambda)(5-\lambda) - 15 = 0$

$\lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0. \Rightarrow (\lambda - 10)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 10$

$\lambda_2 = 2.$

• $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7x_{11} + 3x_{12} = 10x_{11}. \\ 5x_{11} + 5x_{12} = 10x_{12} \end{cases}$

$\Rightarrow x_{12} = +x_{11} \Rightarrow x_1 \in Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ +1 \end{bmatrix}\right\}.$

• $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7x_{21} + 3x_{22} = 2x_{21} \\ 5x_{21} + 5x_{22} = 2x_{22}. \end{cases}$

$\Rightarrow x_{22} = -\frac{5}{3}x_{21} \Rightarrow x_2 \in Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}\right\}.$ $1 + \frac{25}{9}$ $\frac{\sqrt{34}}{3}$

Vectorii normați vor fi

$x_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T \quad x_2 = \left[\frac{3}{\sqrt{34}}, -\frac{5}{\sqrt{34}}\right]^T.$

Pentru metoda puterii directe

$y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

pas 1: $z = Ay = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

$y = \left[\frac{7}{\sqrt{74}} \quad \frac{5}{\sqrt{74}}\right]^T$

$L = \left[\frac{7}{\sqrt{74}} \quad \frac{5}{\sqrt{74}}\right]\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{74}} \\ 5/\sqrt{74} \end{bmatrix} = \left[1 \quad \frac{46}{74}\right]\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{374}{37}$

Hoteles CATALONIA Buenos Hoteles

Se poate observa că, deși $L = 10 + \frac{4}{37} \approx \lambda_1$, vectorul propriu corespunzător x_1 nu se apropie de valoarea calculată y.

Metoda puterii inverse presupune alegerea unei aproximații inițiale μ pentru λ_2 a.î. $\frac{1}{\mu - \lambda_2}$ să fie valoare proprie dominantă. Se aplică după ce a fost calculată o approx. pentru valoarea proprie dominantă λ_1, deoarece știm că $\lambda_1 > \lambda_2$. Cum λ_1 a fost obținut aproximativ 10 cu MPD vom alege $\lambda_2 < \lambda_1$ (putem alege $\lambda_2^{(0)} \approx 5$).

Metoda puterii inverse presupune alegerea lui μ și va considera $y^{(0)} = [0, 1]^T$. Pașii MPI sunt:

$$y = y^{(0)} = [0 \ 1]^T$$

$$\mu^{(0)} = (y^{(0)})^T A y = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

% deci nu putem alege $\lambda^{(0)} = 5$!

pentru $k = 1, 2, \dots$

rezolvăm sistemul $(A - \mu^{(k)} I) z = y \left(\Rightarrow z = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -2/15 \end{bmatrix} \right)$

$$y = \frac{z}{\|z\|} \left(= \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} \end{bmatrix} \text{ la pasul } 1 \right)$$

$$\lambda = y^T A y \quad \left(= \frac{35}{13} \right)$$

$$\mu^{(k)} = \lambda.$$

Câtul Rayleigh $\mu^{(k)}$ actualizat la fiecare pas are ca efect accelerarea metodei puterii și obținerea unei valori cât mai apropiate de cea exactă (creștere a preciziei).

Central de reservas 902 30 10 78

b)
```
function [L y ok] = MPI(A, y, maxit, e)
    k=0; L=0; miu = y'*A*y; [m n]=size(A);
    While (k <= maxit &&
             norm(A*y-L*y) > e)
        k = k+1.
        z = b/(A - miu*eye(n));
        y = z./norm(z);
        L = y'*A*y;
        miu = L;
    end
    ok = (norm(A*y - L*y) < e);
```

f) Calculăm $B^TB = (P^TAQ)^T \cdot P^TAQ = Q^TA^T\underbrace{PP^T}AQ$

$= Q^TA^TAQ$

$\Rightarrow$ B^TB este ortogonal asemenea cu A^TA $\Rightarrow \lambda(B^TB) = \lambda(A^TA)$

deci și valorile singulare ale lui B vor fi aceleași cu ale lui A.

$\sigma(B) = \sigma(A)$

$A = U\Sigma_1 V^T \Rightarrow B = P^TU\Sigma V^TQ = (P^TU)\Sigma(Q^TV)^T$

deci vectorii singulari la stânga vor fi coloanele lui P^TU și vectorii singulari la dreapta vor fi coloanele lui Q^TV.

NUMĂRUL 2, SUBIECTUL 5.

a) $P_4(x) = \sum_{i=1}^{4} f(x_i) \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = 5 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} +$

$+ 0 - + 1 \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} + 2 \frac{(x+1)(x)(x-1)}{(2+1)2(2-1)}$.

$P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{-6} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{-2} + 2 \cdot \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{6} =$

$$= -\frac{15}{6\cdot 8} + \frac{9}{2\cdot 8} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{2\cdot 8} + \frac{9}{2\cdot 8} - \frac{2}{2\cdot 8} = \frac{2}{2\cdot 8} = \frac{1}{8}.$$

! nu se calculează expresia erorii pentru polinomul Lagrange

b)
```
function val= Lagrange (x, y, a)
    n=length (x);
    val=0;
    for i=1:n
        prod=1;
        for j=1:n
            if i~=j
                prod=prod*(a-x(j))/(x(i)-x(j));
            end
        end
        val=val + y(i)*prod;
    end
```

c) O transformare liniară de variabilă este $x = \alpha t + \beta$

$$L_i(x) = L_i(\alpha t + \beta) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\alpha t + \beta - \alpha t_j - \beta}{\alpha t_i + \beta - \alpha t_j - \beta} = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

$$= L_i(t)$$

Pentru a demonstra că $\sum_{i=1}^{n} L_i(x) = 1$ vom considera funcția constantă $f(x) = 1$ pentru care $P_n(x) = 1$

$$\Rightarrow \quad 1 = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot L_i(x)$$