Facultatea de Automatica si Calculatoare, Universitatea Politehnica din Bucuresti

Examen Partial MN

Student:	______________________________	**Grupa:**	__________

Descriere curs:	**MN, An I, Semestrul II**
Titlu curs:	**Metode Numerice**
Profesor:	**Conf.dr.ing. Florin POP**
Durata examenului:	90 minute
Tip Examen:	**Closed Book**
Materiale Aditionale:	**Nu! Fara telefoane mobile!!!**
Numar pagini:	______________

Rezultate Examen	
Subiect	Punctaj
1	/2
2	/2
3	/2
4	/2
5	/2
$\sum$	/10

Subiecte (Numarul 1)

2 puncte **1.** Partea 1 [1.0p]. Fie matricea `A = [1 2 1; 2 6 4; 3 10 8]`. Determinati factorizarea $A = L \times U$, unde L este o matrice inferior triunghiulara cu $L_{ii} = 1$ si U este o matrice superior triunghiulara. Folosind aceasta factorizare, rezolvati sistemul de ecuatii $Ax = b$, unde `b = [0 0 1]`^{T}.
Partea 2 [1.0p]. Deduceti formulele generale ale factorizarii $A = L \times U$ (cu $L_{ii} = 1$) si scrieti o functie Matlab `function [L U] = doolittle(A)` care implementeaza aceasta factorizare.
Bonus [0.4p]. Daca presupunem cunoscuta factorizarea $A = L \times U$, prezentati o metoda numerica de factorizare $\overline{A} = \overline{L} \times \overline{U}$, unde $\overline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ R & A \end{bmatrix}$ si R este superior triunghiulara.

2 puncte **2.** Partea 1 [0.5p]. Prezentati pe scurt metoda iterativa Jacobi pentru rezolvarea unui sistem liniar de ecuatii. Cum se alege aproximatia initiala?
Partea 2 [1.5p]. Scrieti o functie Matlab care rezolva un sistem liniar prin metoda iterativa Jacobi: `function [x xit] = Jacobi(A,b,x,e,maxit)`. Semnificatia parametrilor este: `A` - matrice coeficienti sistem liniar, `b` - vector termeni liberi, `x` - vectorul aproximatiei initiale a solutiei si final vectorul solutie, `e` - toleranta admisa, `maxit` - numarul maxim de iteratii admise, `xit` - matrice avand linia `k` solutia la pasul de iteratie `k`.
Bonus [0.4p]. Demonstrati ca $\rho(A) \leq ||A||$, unde $\rho(A)$ este raza spectrala a matricei A, iar $||.||$ este o norma consistenta.

$\boxed{\textbf{2 puncte}}$ **3.** **P**artea 1 [1.0p]. Un vector $x \in R^n$ poate fi adus la un vector de norma 1 prin impartirea cu norma sa. Fie reflectorii Householder $U = I_n - 2uu^T$ si $V = I_n - vv^T$, cu $||u||_2 = 1$ si $||v||_2 = \sqrt{2}$. Aratati ca U si V sunt ortogonale. Calculati Uu si Vv. Daca $A = uv^T$, calculati $B_{kp} = U^k A(V^T)^p$ cu $k, p \in N$.

Partea 2 [1.0p]. Dati un exemplu numeric de vectori $u, v \in R^3$ care respecta conditiile descrise in Partea 1. Calculati reflectorii U si V si matricea A.

Bonus [0.3p]. Fie $x, y \in R^m$ doi vectori dati. In ce conditii exista un scalar α si un reflector $U \in R^{m\times m}$ astfel incat $Ux = \alpha y$. Ce restrictii apar daca impunem restrictia suplimentara $\alpha = 1$.

$\boxed{\textbf{2 puncte}}$ **4.** **P**artea 1 [1.0p]. Calculati valorile si vectorii proprii pentru matricea de rotatie data prin $P = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$, cu $c^2 + s^2 = 1$.

Partea 2 [1.0p]. Scrieti o functie MATLAB care implementeaza metoda puterii directe. Explicati pe scurt cum putem garanta alegerea corecta pentru aproximatia initiala $y^{(0)}$.

Bonus [0.4p]. Se considera matricile $A \in R^{m\times n}$ si $B \in R^{n\times m}$ si matricile patrate $C = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$ si $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$. Aratati ca cele doua matrice sunt asemenea. Ce efect are aceasta legatura asupra valorilor proprii ale matricilor C si D?

$\boxed{\textbf{2 puncte}}$ **5.** **P**artea 1 [1.0p]. Fie functia $f(x)$ data prin $x = -1, 0, 1, 2$ si $f(x) = 5, 0, 1, 2$. Calculati polinomul Newton de interpolare si scrieti expresia erorii. Calculati pe baza polinomului Newton $f(\frac{1}{2})$ si estimati eroarea acestui calcul.

Partea 2 [1.0p]. Scrieti o functie MATLAB pentru calculul polinomului Newton intr-un punct a.

Bonus [0.4p]. Fie functia $f(x)$ data prin $x = a, 0, 1, b$ si $f(x) = y_a, y_0, y_1, y_a$. Ce devin diferentele divizate cand $a \to 0$ si $b \to 1$?

NUMĂRUL 1.

SUBIECTUL 1.

a) $A = L \times U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

din produsul celor 2 matrici obținem

- $u_{11} = 1$, $u_{12} = 2$, $u_{13} = 1$.
- $l_{21} u_{11} = 2 \Rightarrow l_{21} = 2$, $l_{21} u_{12} + u_{22} = 6 \Rightarrow u_{22} = 2$,
  $l_{21} u_{13} + u_{23} = 4 \Rightarrow u_{23} = 2$
- $l_{31} u_{11} = 3 \Rightarrow l_{31} = 3$, $l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} = 10 \Rightarrow l_{32} = 2$,
  $l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + u_{33} = 8 \Rightarrow u_{33} = 1$

$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rezolvarea sistemului $Ax = b$ prin metoda LU presupune
$Ly = b$ și $Ux = y$.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Pentru factorizarea directă

$A = L \times U \Rightarrow A_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{ik} U_{kj}$

$A_{pj} = \sum_{k=1}^{p-1} L_{pk} U_{kj} + L_{pp} U_{pj} \Rightarrow U_{pj} = A_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} L_{pk} U_{kj}$

$j = p : n$

$$A_{ip} = \sum_{k=1}^{p-1} L_{ik}U_{kp} + L_{ip}U_{pp} \Rightarrow L_{ip} = \left(A_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} L_{ik}U_{kp}\right)/U_{pp}$$

$i = p+1:n$

Funcția Matlab este:

```
function [L U] = doolittle(A)
    [n n] = size(A)
    for p = 1:n
        for j = p:n
            s = A(p, 1:p-1) * A(1:p-1, j);
            A(p,j) = A(p,j) - s;
        end
        for i = p+1:n
            s = A(i, 1:p-1) * A(1:p-1, p);
            A(i,p) = (A(i,p) - s) / A(p,p);
        end
    end
    U = triu(A);
    L = A - U + eye(n);
```

c) Pentru matricea $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ R & A \end{bmatrix}$ avem:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ R & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LU & 0 \\ R & LU \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ RU^{-1} & L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} = \bar{L} \times \bar{U}$$

Metoda de calcul constă în următorii pași:

1. Se calculează L și U din $A = LU$
2. Se determină U^{-1}
3. Se calculează produsul RU^{-1}.
4. Se formează matricile

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ RU^{-1} & L \end{bmatrix} \text{ și } \bar{U} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}$$

NUMĂRUL 1
SUBIECTUL 2

a) Metodele iterative presupun descompunerea matricei sistemului sub forma $A = N - P$. Vom partitiona matricea A sub forma $A = D - L - U$. In metoda Jacobi se aleg

$N = D$ $\qquad (A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n})$

$P = L + U$.

$\Rightarrow G = D^{-1}(L+U)$, $c = D^{-1}b$.

obtinem: $D x^{(p+1)} = (L+U) x^{(p)} + b$ și

$$x_i^{(p+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1, j \ne i}^{n} a_{ij} x_j^{(p)}\right) / a_{ii}$$

Aproximatia inițială se poate alege în modul următor:

- calculăm $x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n)$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1})$$

- alegem random un vector $(x_1, x_2, \dots x_n)^T$, care poate fi și vectorul nul și apoi facem înlocuirile în partea dreaptă în relațiile de mai sus. Rezultă astfel aproximatia inițială.

Dacă vom considera $(0, 0, \dots, 0)^T$ obtinem:

$$x^{(0)} = \left(\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, \frac{b_n}{a_{nn}}\right)^T$$

b) [x xit] = jacobi(A, b, x, e, maxit)

function

```
[n n] = size(A);   x0 = x;
for k = 1 : maxit
    for i = 1:n
        s1 = A(i,1:i-1) * x0(1:i-1);
        s2 = A(i,i+1:n) * x0(i+1:n);
        x(i) = (b(i) - s1 - s2) / A(i,i);
    end
    xit(k, 1:n) = x;
    p = norm(x - x0, 1);   % putem alege si norma2
    g = norm(x0, 1);
    x0 = x;
    if p < e*g
        break;
    end
end.
```

c) Vom considera pentru valoarea proprie λ, vectorul propriu corespunzător, de normă 1, vom avea

$$|\lambda| = |\lambda|\cdot\|x\| = \|\lambda x\| = \underbrace{\|Ax\| \leq \|A\|}_{\text{normă consistentă}}\cdot\|x\| = \|A\|$$

NUMĂRUL 1, SUBIECTUL 3.

a) $U\cdot U^T = (I_n - 2uu^T)(I_n - 2uu^T)^T = (I_n - 2uu^T)(I_n - 2uu^T) =$
$= I_n - 2uu^T - 2uu^T + 4u\underbrace{u^Tu}_{1}u^T = I_n - \cancel{4uu^T} + \cancel{4uu^T} = I_n$

$V\cdot V^T = (I_n - vv^T)(I_n - vv^T)^T = (I_n - vv^T)(I_n - vv^T) = I_n -$
$- vv^T - vv^T + v\underbrace{v^Tv}_{2}v^T = I_n - 2\cancel{vv^T} + 2\cancel{vv^T} = I_n$

$\Rightarrow$ U și V sunt reflectori ortogonali.

$Uu = (I_n - 2uu^T)u = u - 2u\underbrace{u^Tu}_{1} = u - 2u = -u.$

$Vv = (I_n - vv^T)v = v - v\underbrace{v^Tv}_{2} = v - 2v = -v.$

Pentru calculul $B_{kp} = U^k A (V^T)^p$ calculăm

$B_{0,0} = A$

$B_{0,p} = uv^T \cdot (V^T)^p = -uv^T (V^T)^{p-1} = \dots = (-1)^p A$

$B_{k,0} = U^k uv^T = -U^{k-1} uv^T = \dots = (-1)^k A.$

$B_{k,p} = U^k uv^T (V^T)^p = (-1)^p \cdot (-1)^k A = (-1)^{k+p} A.$

$\Rightarrow \boxed{B_{k,p} = (-1)^{k+p} \cdot A}$

b) $u = [1 \ 0 \ 0]^T$, $v = [1 \ 1 \ 0]^T$

$$U = I_3 - 2uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[1 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = I_3 - vv^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1 \ 1 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = uv^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[1 \ 1 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Pentru un reflector avem: $Ux = x - \tau u$, unde $\tau = \frac{u^T x}{\beta} \Rightarrow x - \tau u = \alpha y$, deci se poate alege $u = x - \alpha y$. iar modulul lui α este fixat prin condiția $\|Ux\| = \|x\| = \|\alpha y\| = |\alpha|\|y\|$

$\Rightarrow |\alpha| = \dfrac{\|x\|}{\|y\|}$ (semnul lui α se alege $\pm$)

Dacă $\alpha = 1$, $\|x\| = \|y\|$, trebuie ca $x \nparallel y$, deoarece am avea $u = 0$ și $U = I$ (banal).

NUMĂRUL 1. SUBIECTUL 4.

a) $|P - \lambda I_2| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} c-\lambda & s \\ -s & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(c-\lambda)^2 + s^2 = 0 \Rightarrow c - \lambda_{1,2} = \pm is \Rightarrow \lambda_{1,2} = c \pm is$

Deci $\lambda_1 = c + is$ (valori complexe).
$\lambda_2 = c - is$

Vectorii proprii se obțin din $Ax = \lambda x$.

- $\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha + i\beta \\ \gamma + i\delta \end{bmatrix} = (c+is) \begin{bmatrix} \alpha + i\beta \\ \gamma + i\delta \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha c + i\beta c + \gamma s + i\delta s = (c+is)(\alpha + i\beta) \\ -s\alpha - i\beta s - s\gamma - i\delta s = (c+is)(\gamma + i\delta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\alpha c} + \cancel{i\beta c} + \underline{\gamma s} + i\underline{\underline{\delta s}} = \cancel{c\alpha} + \cancel{i\beta c} + i\underline{\underline{\alpha s}} - \underline{s\beta} \\ -s\alpha - i\beta s - s\gamma - i\delta s = c\gamma + ic\delta + i\gamma s - s\delta \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha = \delta. \\ \beta = -\gamma \end{matrix}$ deci $x_1 = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta \\ -\beta + i\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} (\alpha + i\beta)$

$\Rightarrow x_1 \in Sp\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$

- $\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha + i\beta \\ \gamma + i\delta \end{bmatrix} = (c-is) \begin{bmatrix} \alpha + i\beta \\ \gamma + i\delta \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} c\alpha + ic\beta + \gamma s + i\delta s = (c - is)(\alpha + i\beta) \\ -s\alpha - i\beta s + \gamma c + i\delta c = (c - is)(\gamma + i\delta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{c\alpha} + \cancel{ic\beta} + \underline{\gamma s} + i\underline{\delta s} = \cancel{c\alpha} + \cancel{i\beta c} - i\underline{s\alpha} + \underline{\beta s} \\ -s\alpha + i\beta s + \gamma c + i\delta c = c\gamma + ic\delta - i\gamma s + s\delta. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = \beta \\ \delta = -\alpha \end{cases} \quad \text{deci} \quad x_2 = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta \\ \beta - i\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} (\alpha + i\beta)$$

$$\Rightarrow x_2 \in S_p \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$$

b)

```
function [L y ok] = MPD(A, y, maxit, e)
    k=0; L=0;
    while (k <= maxit &&
           norm(A*y - L*y) > e)
        k=k+1;
        z = A*y;
        y = z/norm(z);
    end
    L = y'*A*y;
    ok = (norm(A*y - L*y) < e);
```

c) Considerăm matricea:

$$T = \begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

și avem:

$$T^{-1}CT = \begin{bmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix} = D.$$

$\Rightarrow D = T^{-1}CT.$

Două matrici asemenea au aceloși polinom caracteristic, deci aceleași valori proprii.

NUMĂRUL 1, SUBIECTUL 5.

a)

$$\begin{array}{cccccccc}
x & F_0 & & F_1 & & F_2 & & F_3 \\
-1 & 5 & & & & & & \\
 & & & \frac{5-0}{-1-0} = -5 & & & & \\
0 & 0 & & & & \frac{-5-1}{-1-1} = 3 & & \\
 & & & \frac{0-1}{0-1} = 1 & & & & \frac{3-0}{-1-2} = -1 \\
1 & 1 & & & & \frac{1-1}{0-2} = 0 & & \\
 & & & \frac{1-2}{1-2} = 1 & & & & \\
2 & 2 & & & & & &
\end{array}$$

$P_4(x) = 5 - 5(x+1) + 3x(x+1) - x(x+1)(x-1)$

$|R_n(x)| \le |(x+1)x(x-1)(x-2)| \cdot \dfrac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$

Pentru $x = \frac{1}{2}$ avem:

$$P_4\left(\tfrac{1}{2}\right) = 5 - 5\cdot\frac{3}{2} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 - \frac{15}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{8}$$

$$= 5 + \frac{-60+18+3}{8} = 5 - \frac{39}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\left|R_n\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \le \left|\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\right| \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{16} \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{8\cdot\cancel{3}} = \frac{3}{128} f^{(4)}(\xi)$$

b)

```
function a = DifDiv(x,y)
    n=length(x);
    for k = 1:n-1
        y(k+1:n) = (y(k+1:n) - y(k))./(x(k+1:n) - x(k));
    end
    a=y(:);
```

```
function b= Newton(a,x,y)
    n=length(x);
    d= DifDiv(x,y);
    b= d(n);
    for i= n-1:-1:1
        b= (a-x(i-1)).*b + d(i);
    end.
```

c) $F_1[0,0] = \lim_{a\to 0} F_1[a,0] = \lim_{a\to 0} \frac{f(a)-f(0)}{a-0} = f'(0)$

$F_1[1,1] = \lim_{b\to 1} F_1[1,b] = \lim_{b\to 1} \frac{f(1)-f(b)}{1-b} = f'(1)$

$F_2[0,0,1] = \lim_{a\to 0} F_2[a,0,1] = \frac{F_1[0,0]-F_1[0,1]}{0-1} = y_1 - y_0 - f'(0$

$F_3[0,0,1,1] = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 1}} F_3[a,0,1,b] = \frac{F_2[0,0,1]-F_2[0,1,1]}{0-1} = 2(y_0-y_1) + f'(0)+f'(1)$

$F_2[0,1,1] = \lim_{b\to 1} F_2[0,1,b] = \frac{F_1[0,1]-F_1[1,1]}{0-1} = y_0 - y_1 + f'($